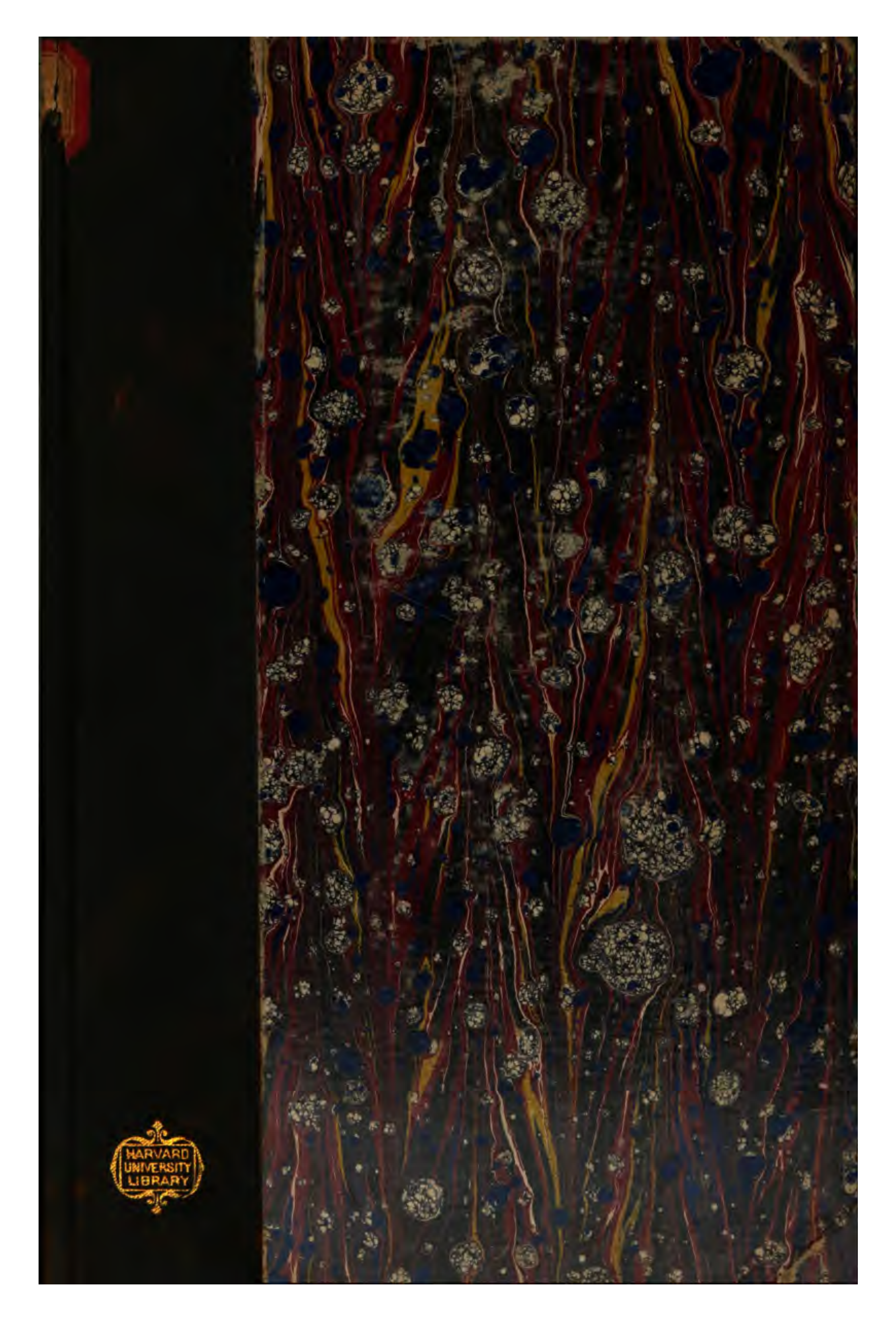

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY



Lehrbuch der Stereometrie

von

Dr. Julius Petersen,
Docent an der polytechnischen Schule zu Kopenhagen,
Mitglied der königlich dänischen Akademie der Wissenschaften.

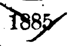
Ins Deutsche übersetzt unter Mitwirkung des Verfassers

von

Dr. R. von Fischer-Benzon,
Oberlehrer am Gymnasium in Kiel.



Kopenhagen
Verlag von Andr. Fred. Höst & Sohn.
Buchhändler der kön. dän. Akademie der Wissenschaften.



1885

Preis 1 Mk. 60 Pf.

Lehrbuch der Stereometrie

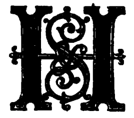
von

Dr. Julius Petersen,
Docenten an der polytechnischen Schule zu Kopenhagen,
Mitgliede der königlich dänischen Akademie der Wissenschaften.

Ins Deutsche übersetzt unter Mitwirkung des Verfassers

von

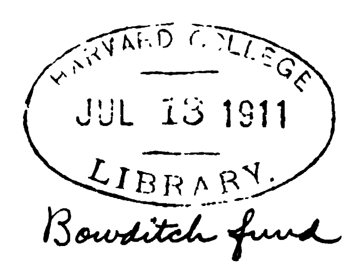
Dr. R. von Fischer-Benzon,
Oberlehrer am Gymnasium in Kiel.



Kopenhagen

Verlag von Andr. Fred. Höst & Sohn
Buchhändler der kön. dän. Akademie der Wissenschaften

1885



Kopenhagen. — Bianco Lunos kön. Hof-Buchdruckerei.

Einleitung.

1. Die Stereometrie ist die Lehre von den Formen im Raume.

2. Eine Ebene ist eine Fläche, in der jede Gerade, welche zwei Punkte der Fläche verbindet, ganz enthalten ist.

Hieraus folgt, dafs eine Ebene durch drei Punkte bestimmt ist, welche nicht auf derselben Geraden liegen. Enthalten nämlich zwei Ebenen beide die Punkte A, B und C, so enthalten sie auch beide die Geraden AB, AC und BC; eine beliebige Gerade der einen Ebene mufs dann auch in der anderen Ebene liegen, denn diese enthält die Durchschnittspunkte der Geraden mit AB, AC und BC.

Hieraus folgt wieder, dafs zwei Ebenen sich nur in einer Geraden schneiden können. Schneiden die Ebenen sich nicht, wie weit man dieselben auch erweitert, so heifsen sie parallel.

Die Durchschnittslinie zweier Ebenen heifst auch die Spur der einen Ebene in der anderen.

Eine Gerade kann eine Ebene nur in einem Punkte schneiden; schneidet dieselbe die Ebene nicht, wie weit man sie auch verlängert, so heifsen Gerade und Ebene parallel.

Zwei gerade Linien heifsen parallel, wenn sie in derselben Ebene liegen und sich nicht schneiden, wie weit man sie auch verlängert.

Eine Ebene ist also bestimmt durch zwei gerade Linien, welche sich schneiden oder parallel sind. Durch zwei beliebige gerade Linien im Raume läfst sich in der Regel eine Ebene nicht legen.

3. Ein Körper, welcher von ebenen Polygonen begrenzt ist, heifst ein Vielflächner oder Polyeder. Die Polygone heifsen Seitenflächen, ihre Seiten Kanten. Die Kanten stofsen in den Ecken zusammen. Die Ecken heifsen nach der Anzahl der zusammenstofsenden Kanten dreiseitig, vierseitig u. s. w. Die Ecken werden durch Diagonalen verbunden. Das Tetraeder, Pentaeder, Hexaeder u. s. w. sind Polyeder mit beziehungsweise 4, 5, 6 ... Seitenflächen. Ein Polyeder ist konvex, wenn alle Erweiterungen der Seitenflächen aufserhalb des Polyeders fallen. Im entgegengesetzten Falle heifst es nichtkonvex.

4. Die Kugel ist eine Fläche, deren sämtliche Punkte denselben Abstand (Radius) von einem gewissen Punkt (Mittelpunkt) haben. Eine Kugel wird also von einem Halbkreise beschrieben werden, der sich um den Durchmesser dreht.

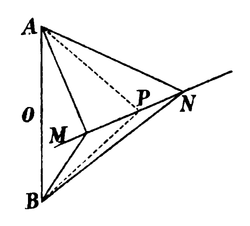
Erstes Kapitel.

Lage von Geraden, Ebenen und Kugeln.

Normale einer Ebene.

5. Der geometrische Ort für alle Punkte, welche gleiche Entfernung von zwei gegebenen Punkten A und B haben, ist eine Ebene.

M und N seien zwei beliebige solche Punkte, während P ein beliebiger Punkt der Geraden MN ist. Da die Dreiecke MAN und MBN kongruent sind, so ist $AP = BP$. Der gesuchte geometrische Ort enthält also jeden Punkt P von MN, sobald er M und N enthält. Der Ort ist deshalb eine Ebene (2).



Die Ebene schneidet AB in ihrer Mitte O, da $OA = OB$; jede in der Ebene durch O gezogene Gerade ist senkrecht auf der Mitte von AB. Die Ebene wird also erzeugt werden durch den einen Schenkel eines rechten Winkels, der sich um den anderen Schenkel OA dreht.

Steht eine Gerade OA senkrecht auf zwei geraden Linien einer Ebene, so mufs diese mit der Ebene zu-

sammenfallen, welcher von einer von diesen Linien durch Umdrehung um OA beschrieben wird, folglich:

Steht eine Gerade senkrecht auf zwei geraden Linien einer Ebene, so mufs sie senkrecht auf jeder geraden Linie stehen, welche sie in der Ebene trifft. In diesem Falle sagt man, dafs die Gerade senkrecht (normal) auf der Ebene stehe.

6. Durch einen Punkt läfst sich eine und nur eine Ebene senkrecht zu einer gegebenen Geraden legen.

Da man eine Ebene durch den Punkt und die Gerade legen kann, so kann man auch von dem Punkte eine und nur eine Senkrechte auf die Gerade fällen; dadurch ist dann die gesuchte Ebene vollkommen bestimmt (5).

Liegt der Punkt in der Geraden, so kann man in demselben unendlich viele Senkrechten errichten; die Ebene ist der geometrische Ort für diese.

7. Von einem Punkte läfst sich eine und nur eine Senkrechte auf eine Ebene fällen.

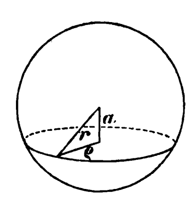
Von allen Linien, welche sich vom Punkte P an die Ebene ziehen lassen, mufs eine die kürzeste sein, oder es mufs mehrere gleich grofse geben, welche die kürzesten sind; das letztere kann nicht der Fall sein, denn wenn $PA = PB$, so wird die von P an die Mitte von AB gezogene Linie kürzer als jede von diesen. Ist PA die kürzeste Linie, so mufs sie auf jeder in der Ebene durch A gezogene Geraden senkrecht stehen, da im entgegengesetzten Falle die Senkrechte kürzer werden würde. PA steht deshalb senkrecht auf der Ebene. Eine andere Linie PB kann nicht senkrecht

sein, da das Dreieck *PAB* in solchem Falle zwei rechte Winkel enthalten würde.

Die Normale mifst den Abstand des Punktes von der Ebene (ihr Fufspunkt heifst die Projektion des Punktes auf die Ebene). Schiefe, welche gleich viel von der Normalen abweichen, sind gleich grofs, während eine Schiefe, welche mehr als eine andere abweicht, gröfser ist als diese, und umgekehrt. Es giebt also unendlich viele gleich grofse Schiefe von einem Punkte an eine Ebene, nämlich alle die Linien, welche sich von dem Punkte an eine Kreisperipherie der Ebene um den Fufspunkt der Normalen als Mittelpunkt ziehen lassen.

8. **Die Kugel.** Eine Ebene schneidet eine Kugel in einem Kreise.

Alle Punkte der Durchschnittskurve haben nämlich denselben Abstand vom Mittelpunkte der Kugel und deshalb auch von dem Fufspunkte der von diesem Mittelpunkte auf die Ebene gefällten Senkrechten.



Ist r der Radius der Kugel, a der Abstand der Ebene vom Mittelpunkte, ρ der Radius des Schnittkreises, so hat man

$$r^2 = a^2 + \rho^2. \tag{1}$$

Für $a = r$ wird $\rho = o$; die Ebene hat nur einen unendlich kleinen Kreis mit der Kugel gemeinsam und heifst eine Berührungsebene; dieselbe steht senkrecht auf dem an den Berührungspunkt gezogenen Radius. Ist $a = o$, so wird $\rho = r$; die Ebene ist eine Diametralebene und schneidet die Kugel in einem

gröfsten Kreise oder Hauptkreise, dessen Radius gleich dem der Kugel ist. Jeder andere Kreis auf der Kugelfläche heifst ein Schnittkreis (Parallelkreis).

9. Durch vier Punkte, welche nicht in derselben Ebene liegen, läfst sich eine und nur eine Kugel legen.

A, *B*, *C* und *D* seien die vier Punkte. Zwei Ebenen, senkrecht auf den Mitten von *AB* und *BC*, schneiden sich in einer Geraden, welche der geometrische Ort für alle Punkte ist, die von *A*, *B* und *C* dieselbe Entfernung haben; diese Gerade ist zufolge 7 die Normale auf der Ebene *ABC* im Mittelpunkte des Kreises *ABC*, und jeder ihrer Punkte hat dann dieselbe Entfernung von allen Punkten dieses Kreises. Ein Punkt der Normalen, welcher gleiche Entfernung von *D* und einem beliebigen Punkte *E* der Kreisperipherie hat, hat dann gleiche Entfernung von den vier gegebenen Punkten und ist deshalb Mittelpunkt der gesuchten Kugel. Im besonderen kann man *E* in einem der Durchschnittspunkte des Kreises mit der durch *D* und die Normale gelegten Ebene wählen. Der gesuchte Punkt ist dann der Durchschnittspunkt der Normalen mit einer Geraden, die senkrecht auf der Mitte von *DE* in der Ebene steht, welche *D* und die Normale enthält; man ersieht hieraus, dafs der Mittelpunkt der Kugel nur unendlich weit fortfallen kann, wenn *D* in der Ebene *ABC* liegt.

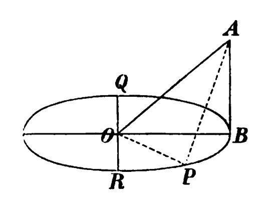
Liegt *D* in der Ebene *ABC*, so wird die Aufgabe unbestimmt, wenn die vier Punkte auf demselben Kreise liegen; im entgegengesetzten Falle ist die Lösung unmöglich, wird aber möglich wenn man die Ebene selbst als eine Kugel mit unendlich grofsem Radius betrachtet.

Da vier Punkte, welche nicht auf einer Kreis-

peripherie liegen, eine Kugel bestimmen, so mufs die Durchschnittskurve zweier Kugeln ein Kreis sein. Ihre Centrale enthält zwei Punkte, welche gleichen Abstand von allen Punkten des Schnittkreises haben; sie mufs deshalb senkrecht auf der Ebene dieses Kreises stehen und durch seinen Mittelpunkt gehen (7). Wird der Kreis unendlich klein, so berühren sich die Kugeln, die Centrale geht durch den Berührungspunkt und ist gleich der Summe oder Differenz der Radien.

Winkel einer Geraden mit einer Ebene. Linien in verschiedenen Ebenen.

10. Eine Gerade schneide eine Ebene in O. Von einem beliebigen Punkte A der Geraden fälle man auf die Ebene die Senkrechte AB, und in der Ebene ziehe man einen Kreis durch B mit dem Mittelpunkte O. P sei ein beliebiger Punkt der Peripherie; im Dreieck AOP werden dann, wenn P die Kreislinie durchläuft, die beiden Seiten AO und OP konstant sein, während die dritte Seite AP wächst, wenn der Abstand von B nach P wächst. Gleichzeitig mit dieser Linie wächst der Winkel AOP (Planimetrie 46). Dieser Winkel ist also am kleinsten, wenn P auf B fällt, am gröfsten, wenn P auf den diametral entgegengesetzten Punkt fällt, und zwei mit Beziehung auf OB symmetrischen Lagen von P entsprechen zwei gleich grofse Winkel. Ist der Durchmesser RQ senkrecht auf OB, so werden also die Winkel AOR



und AOQ gleich grofs, und da diese Winkel Nebenwinkel sind, so sind sie Rechte.

Da OA den kleinsten Winkel mit OB bildet, so mufs OB dieselbe bleiben, auch wenn man für A einen anderen Punkt auf OA wählt. Jeder Punkt auf OA erhält deshalb seine Projektion auf OB; die Projektionen der Punkte einer Kurve auf eine Ebene bilden eine Kurve, welche die Projektion der gegebenen Kurve heifst; es ist also bewiesen, dafs die Projektion einer Geraden auf eine Ebene selbst eine Gerade ist.

Die projicierenden Linien liegen alle in der Ebene AOB, welche die projicierende Ebene der Geraden heifst. Die projicierenden Linien sind also sämtlich parallel. Da zwei Senkrechte auf derselben Ebene sich auffassen lassen als projicierende Linien für zwei Punkte einer Geraden, welche sie beide schneidet, so sind zwei Gerade, welche auf derselben Ebene senkrecht stehen, parallel. Indirekt beweist man dann leicht, dafs eine Ebene, welche auf einer von zwei parallelen Geraden senkrecht steht, auch auf der anderen senkrecht steht.

Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so ist sie auch ihrer Projektion auf die Ebene parallel, denn sie liegt mit dieser in derselben Ebene (der projicierenden Ebene) und kann sie nicht schneiden ohne die Ebene zu schneiden, der sie parallel ist.

Zwei gerade Linien, welche beide einer dritten Geraden parallel sind, sind unter sich parallel, denn eine Ebene, senkrecht auf der dritten Geraden, ist senkrecht auf den beiden anderen, und diese sind dann, wie oben gezeigt, parallel.

11. Unter dem Winkel (Neigungswinkel) einer Geraden gegen eine Ebene versteht man den Winkel, welchen die Gerade mit ihrer Projektion auf die Ebene bildet; dieser Winkel ist, wie gezeigt wurde, der kleinste von denen, welche die Gerade mit Linien in der Ebene bilden kann; steht die Gerade senkrecht auf der Ebene, so wird ihre Projektion ein Punkt und der Neigungswinkel ein rechter.

Eine Gerade steht senkrecht auf der Geraden in einer Ebene, auf der ihre Projektion senkrecht steht, und umgekehrt. Es wurde nämlich oben bewiesen, dafs OA senkrecht auf QR sei.

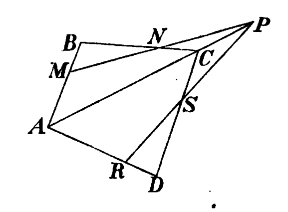
Ist A_1B_1 die Projektion einer Linie AB auf eine Ebene, so hat man

$$A_1B_1 = AB \cos \varphi,$$

wo φ der Winkel ist, den die Linie mit der Ebene bildet.

12. **Das windschiefe Viereck.** Vier Punkte, welche nicht in einer Ebene liegen, sind die Eckpunkte eines sogenannten windschiefen Vierecks.

Eine Ebene, welche die Seiten eines windschiefen Vierecks schneidet, teilt diese in Verhältnisse, deren Produkt 1 ist.



Die Ebene schneide AB, BC, CD und AD beziehungsweise in M, N, S und R, die Diagonale in P. Dann hat man (Plan. Aufg. 133):

$$\frac{AM.CP.BN}{BM.AP.CN}=1;\quad \frac{CS.AP.DR}{DS.CP.AR}=1,$$

woraus

$$\frac{AM.BN.CS.DR}{BM.CN.DS.AR}=1. \qquad (2)$$

Umgekehrt, genügen M, N, S und R dieser Relation, so liegen sie in einer Ebene, denn eine durch drei von den Punkten gelegte Ebene teilt die vierte Seite nach dem durch die Relation bestimmten Verhältnis und mufs deshalb durch den vierten Punkt gehen. Die Stücke sind überall mit Vorzeichen genommen.

Der Relation wird genügt, wenn

$$\frac{BM}{AM}=\frac{CS}{DS} \text{ und } \frac{BN}{CN}=\frac{AR}{DR}. \qquad (3)$$

Zwei Linien, von denen jede ein Paar gegenüberliegender Seiten eines windschiefen Vierecks in proportionale Teile teilt, werden sich also schneiden.

Parallele Linien und Ebenen.

13. **Linien und Ebenen.** Eine Linie ist einer Ebene parallel, wenn sie einer in der Ebene gezogenen Linie parallel ist, denn sie kann die Ebene dann weder in noch aufserhalb (2) dieser Linie schneiden.

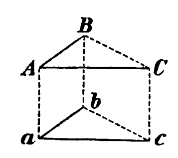
Durch einen Punkt lassen sich unendlich viele Linien ziehen, welche einer Ebene parallel sind; ihr geometrischer Ort ist eine Ebene, welche der gegebenen parallel ist. Der Punkt sei nämlich B (vergl. die Fig. zu 15), seine Projektion auf die Ebene A; läfst man eine Gerade AL_1 in der Ebene und die ihr parallele Gerade BM sich um AB drehen, so beschreibt AL_1 die gegebene Ebene, während BM gleichzeitig alle Lagen

durchläuft, welche mit Geraden in der Ebene parallel sind, und dabei eine auf AB senkrechte Ebene beschreibt. Diese Ebene ist der gegebenen parallel, denn im entgegengesetzten Fall könnte man von einem Punkte der Durchschnittslinie gerade Linien nach A und B ziehen, die beide senkrecht auf AB ständen.

Eine Gerade, welche senkrecht auf der einen von zwei parallelen Ebenen steht, steht auch senkrecht auf der anderen, denn da sie senkrecht auf allen Geraden in der einen Ebene steht, steht sie auch senkrecht auf den zu diesen parallelen Geraden in der anderen Ebene.

14. Zwei Winkel (BAC und bac), deren Schenkel paarweise parallel und gleich gerichtet sind, sind gleich grofs und liegen in parallelen Ebenen.

Macht man $AB = ab$, $AC = ac$, so ist, da $AB \parallel ab$ und $AC \parallel ac$, auch Bb gleich und parallel Cc, mithin $\triangle BAC \cong \triangle bac$ und $\angle A = \angle a$.

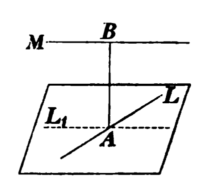


Die Ebenen BAC und bac sind parallel, denn eine durch A parallel zur Ebene abc gelegte Ebene mufs die zu ab und ac parallelen Geraden AB und AC enthalten und ist dadurch bestimmt.

Parallele Gerade schneiden eine Ebene unter gleichen Winkeln, denn die Komplemente der Neigungswinkel, welche man erhält, wenn man in den Durchschnittspunkten der Geraden mit der Ebene Senkrechte auf dieser errichtet, haben parallele Schenkel.

15. **Abstand zweier Geraden.** Falls zwei Gerade sich nicht schneiden, so mufs die kürzeste Linie von

einem Punkte der einen bis zu einem Punkte der anderen Geraden auf beiden senkrecht stehen.



Die beiden Geraden seien L und M, A ein Punkt auf L, B ein Punkt auf M. Steht AB nicht senkrecht auf M, so kann man eine Linie AC senkrecht auf M ziehen; diese ist kürzer als AB; es läſst sich also immer eine Linie von L nach M, welche kürzer als AB ist, finden, so lange AB nicht senkrecht auf beiden Geraden steht.

Der kürzeste Abstand läſst sich auf folgende Weise bestimmen: Durch einen beliebigen Punkt der L ziehe man $L_2 \parallel M$; M ist dann der durch L und L_2 gelegten Ebene parallel. M wird auf diese Ebene in L_1 projiciert, welche der M parallel ist (10) und die L in einem Punkte A schneidet, der die Projektion eines Punktes B auf M ist. AB ist dann die kürzeste Linie, denn sie steht senkrecht auf der Ebene LL_1, aber wenn sie senkrecht auf L_1 steht, so steht sie auch senkrecht auf der Parallelen M.

Dreht man die beiden Geraden um ihren kürzesten Abstand, so beschreiben sie parallele Ebenen (13). Man kann also immer durch zwei Gerade parallele Ebenen legen und diese stehen senkrecht auf dem kürzesten Abstand der beiden Geraden. Eine beliebige Ebene, senkrecht auf dem kürzesten Abstand, wird beiden Geraden parallel.

16. **Parallele Ebenen.** Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so sind die Durchschnittslinien parallel, denn sie liegen in derselben Ebene und können keinen Punkt

gemeinsam haben, da ein solcher Punkt auch den beiden parallelen Ebenen gemeinsam sein würde.

Parallele Linien zwischen parallelen Ebenen sind gleich lang, denn verbindet man ihre Durchschnittspunkte mit den Ebenen, so entsteht ein Parallelogramm.

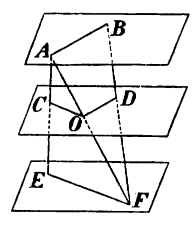
Parallele Ebenen haben deshalb überall denselben Abstand von einander, da der Abstand durch eine auf beiden Ebenen senkrechte Linie gemessen wird.

Parallele Gerade werden auf eine Ebene in parallelen Geraden projiciert, denn die projicierenden Ebenen sind parallel (14).

Sind von vier Ebenen je zwei parallel, so sind ihre vier Durchschnittslinien parallel.

17. Drei parallele Ebenen schneiden von zwei beliebigen Geraden proportionale Stücke ab.

Die Durchschnittspunkte der Geraden mit den Ebenen seien A, C, E, B, D und F, während die Diagonale des in der Regel windschiefen Vierecks $ABFE$ die eine Ebene in O schneiden mögen. Dann ist (16)



$$CO \parallel EF; \quad OD \parallel AB$$

und folglich

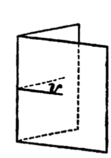
$$\frac{AC}{CE} = \frac{AO}{OF} = \frac{BD}{DF}.$$

Man sieht hieraus zugleich, dafs eine Ebene, welche zwei gegenüberliegenden Seiten eines windschiefen Vier-

ecks parallel ist, die beiden anderen gegenüberliegenden Seiten in proportionale Stücke teilt.

Winkel der Ebenen.

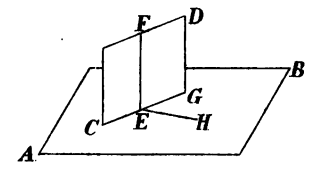
18. **Ebenenwinkel oder Keil.** Unter dem Winkel zwischen zwei Ebenen (Neigungswinkel) versteht man, entsprechend dem Winkel zwischen zwei Geraden, den Teil einer ganzen Umdrehung, den die eine Ebene zurücklegen mufs, um mit der anderen zusammenzufallen. Die beiden Ebenen heifsen die Schenkelebenen des Winkels, ihre Durchschnittslinie die Scheitelgerade oder Kante desselben. Errichtet man in einem Punkte der Scheitelgeraden in jeder Ebene eine Senkrechte, so beschreibt jede dieser Senkrechten bei einer Drehung einer der Ebenen um die Kante dieselbe Ebene (5). Legt die eine Ebene den 2ten, 3ten, 4ten . . . . *n*ten Teil einer ganzen Umdrehung zurück, so thut es die zugehörige Senkrechte gleichfalls. Man nennt deshalb den Winkel zwischen diesen beiden Senkrechten den Neigungswinkel der beiden Ebenen. Es ist gleichgültig in welchem Punkte der Kante man diese Senkrechten errichtet (14). Die Ebenen bilden ebenso wie die Geraden mehrere Winkel mit einander (Nebenwinkel, Scheitelwinkel).



Da die Kante senkrecht auf der durch die beiden Senkrechten bestimmten Ebene steht, so kann man diese beiden auch als die Durchschnittslinien der Ebenen mit einer senkrecht zur Kante gelegten Ebene bestimmen, oder dadurch, dafs man einen Punkt der einen Senkrechten auf die andere Ebene projiciert,

wodurch man einen Punkt der anderen Senkrechten erhält (11). Endlich wird der Winkel der Ebenen derselbe sein wie der Winkel zwischen zwei Senkrechten, welche von einem beliebigen Punkte auf die Ebenen gefällt werden. Fällt man nämlich von diesem Punkte eine Senkrechte auf die Kante, so werden Linien, welche man vom Fuſspunkte dieser Senkrechten durch die Projektionen des beliebigen Punktes zieht, senkrecht auf der Kante stehen (11).

19. Eine Ebene (*CD*), welche durch eine Gerade *EF* gelegt ist, die senkrecht auf einer zweiten Ebene (*AB*) steht, ist selbst senkrecht auf dieser Ebene.



Zieht man nämlich in der Ebene (*AB*) die *EH* senkrecht auf der Kante *CG*, so wird *FEH* der Winkel der Ebenen; aber dieser ist ein Rechter, da $EF \perp (AB)$ (5).

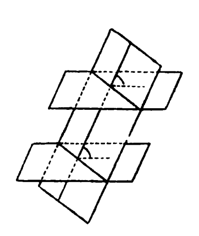
Die Projektion einer Geraden auf eine Ebene ist also die Durchschnittslinie der Ebene mit einer darauf senkrechten durch die Gerade gelegten Ebene (der projicierenden Ebene).

Eine Ebene, senkrecht auf der Kante zweier Ebenen, steht senkrecht auf beiden Ebenen; stehen die beiden ersten Ebenen auf einander senkrecht, so steht jede von den drei Ebenen senkrecht auf den beiden anderen.

20. Eine Gerade *EF*, welche senkrecht auf einer Ebene (*AB*) steht, muſs in jeder Ebene liegen, welche in *E* senkrecht auf (*AB*)

errichtet wird, denn eine Gerade der Ebene (CD), welche senkrecht auf CG steht, steht auch senkrecht auf EH (mit der sie den Neigungswinkel der Ebenen bildet) und folglich auch auf der Ebene (AB); sie mufs also mit EF zusammenfallen. Die Senkrechte auf einer Ebene in einem gegebenen Punkte läfst sich also bestimmen als Durchschnittslinie zweier Ebenen, die senkrecht auf der gegebenen stehen, oder: Stehen zwei Ebenen senkrecht auf einer dritten, so steht ihre Durchschnittslinie auch auf dieser senkrecht. Während man also in der Regel durch eine gegebene Gerade nur eine Ebene senkrecht zu einer gegebenen Ebene legen kann, so lassen sich unendlich viele solcher Ebenen durch die gegebene Gerade legen, wenn dieselbe senkrecht auf der gegebenen Ebene steht.

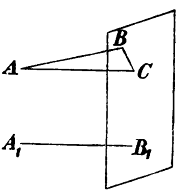
21. Eine Gerade schneidet zwei parallele Ebenen unter demselben Winkel. Legt man durch die Gerade und durch eine von einem ihrer Punkte auf die beiden Ebenen gefällte Senkrechte eine Ebene, so schneidet diese die beiden Ebenen in zwei parallelen Geraden (16), die mit der gegebenen Geraden die beiden Neigungswinkel bilden (19).



Eine Ebene schneidet zwei parallele Ebenen unter gleichen Winkeln. Die beiden Kanten sind nämlich parallel (16); eine auf beiden Kanten senkrechte Ebene schneidet die beiden parallelen Ebenen in zwei parallelen Geraden und die dritte Ebene in einer Linie, welche mit den beiden parallelen Geraden gleiche Winkel bildet; dies sind in-

deſsen die Winkel, welche die schneidende Ebene mit den beiden parallelen Ebenen bildet (18).

22. **Projektion der Figuren.** Die Projektion eines Punktes auf eine Gerade ist der Durchschnittspunkt der Geraden mit einer Ebene, die durch den Punkt senkrecht zur Geraden gelegt ist. Die Projektion einer geraden oder krummen Linie AB auf eine Gerade L ist das Stück von L, welches zwischen den Projektionen der Endpunkte auf L liegt.



AB sei eine gerade Linie, welche auf L in A_1B_1 projiciert wird. Die Projektion ist dann der Abstand zwischen den beiden durch A und B senkrecht zu L gelegten Ebenen. Da diese Ebenen parallel sind, so ist ihr Abstand überall derselbe. Die Projektion ist deshalb gleich einer von A parallel der L bis an die durch B gelegte Ebene gezogenen Geraden. Schneidet diese die Ebene durch B in C, so steht sie senkrecht auf BC; man hat also

$$A_1B_1 = AB \cos BAC.$$

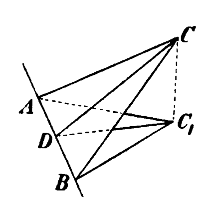
Schneiden zwei Linien sich nicht, so versteht man unter ihrem Winkel denjenigen, den die eine mit einer sie schneidenden Linie bildet, welche der anderen parallel ist. Demgemäſs ist hier BAC der Winkel der gegebenen Linien. Die Gröſse der Projektion wird also durch dieselbe Formel bestimmt, einerlei ob die beiden Linien in derselben Ebene liegen oder nicht.

23. Projiciert man ein ebenes oder windschiefes geschlossenes Polygon $ABC\ldots$ auf eine Gerade, so wird die Summe der Projektionen der Seiten $A_1B_1 + B_1C_1 + \ldots$ (mit Vorzeichen genommen) gleich Null

(Trigonometrie 2). Ist $ABC \ldots H$ nicht geschlossen, so wird die Summe der Seitenprojektionen doch Null werden, sobald die Projektion von H mit der von A zusammenfällt, also sobald man auf eine Gerade projiciert, die in einer auf AH senkrechten Ebene liegt. Projiciert man auf drei Geraden, die durch denselben Punkt gehen und nicht in derselben Ebene liegen, so kann die Summe der Projektionen für höchstens zwei von diesen Null werden; ein Polygon ist also geschlossen, wenn die Summe der Seitenprojektionen auf drei solche Geraden Null wird.

24. Projiciert man eine ebene Figur mit dem Flächeninhalt A auf eine andere Ebene, so erhält die Projektion derselben den Inhalt $A \cos \varphi$, wenn φ den Neigungswinkel der beiden Ebenen bedeutet.

Man sieht leicht, dafs der Satz für ein Dreieck ABC gilt, dessen eine Seite AB auf die Kante der beiden Ebenen fällt; denn diese Seite wird durch die Projektion nicht verändert, während die Höhe CD mit $\cos \varphi$ multipliciert wird. Liegt nur eine Ecke des Dreiecks auf der Kante der beiden Ebenen, so kann man die gegenüberliegende Seite bis zum Durchschnitt mit der Kante verlängern; das Dreieck wird dadurch gleich der Differenz zweier anderen Dreiecke, für welche der Satz nach obenstehendem Beweise gilt; derselbe gilt also auch für das gegebene Dreieck.



Liegt das Dreieck auf beliebige Art im Raum, so kann man durch einen seiner Eckpunkte eine Projek-

tionsebene legen, welche der gegebenen parallel ist; der Satz gilt für die Projektion auf diese Ebene, aber diese Projektion ist der auf die gegebene Ebene kongruent.

Der Satz gilt nun für jede ebene geradlinige Figur, da eine solche sich in Dreiecke zerlegen läfst; dann gilt er auch für ebene Figuren, welche von krummen Linien begrenzt sind, also für alle ebenen Figuren.

25. **Eulers Satz.** Durch die Projektion einer Figur werden die Winkel in der Regel verändert werden, aber da ein Dreieck als ein Dreieck projiciert wird, so wird die Summe der Winkel in einem oder mehreren Dreiecken nicht verändert werden. Hierdurch kann man eine merkwürdige Beziehung zwischen der Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten eines konvexen Polyeders finden. Diese Anzahlen seien f, e und k.

Die Seitenflächen mögen beziehungsweise n_1, n_2, n_3 ... Seiten haben; die Summe aller Polygonwinkel auf der Oberfläche des Polyeders ist dann

$$(n_1 + n_2 + \ldots) 2R - 4fR = (k - f) . 4R,$$

da in der Summe $n_1 + n_2 + \ldots$ jede Kante zweimal genommen ist. Projiciert man die Oberfläche auf eine Ebene, so erhält man die Projektion vom oberen und unteren Teil des Polyeders innerhalb einer gemeinschaftlichen Kontur. Die Winkel um eine Ecke werden als Winkel um einen Punkt projiciert und ihre Summe beträgt $4R$. Doch gilt dies nicht von den Ecken, deren Projektion auf die Kontur fällt. Man erhält hier durch die Projektion die Polygonwinkel der Kontur zweimal, so dafs man die Nebenwinkel der Polygonwinkel zweimal addieren mufs um $4R$ zu erhalten. Da nun die Summe der Aufsenwinkel $4R$ beträgt, so wird die Summe aller Winkel nach der Projektion $4eR - 8R$.

Da nun die Summe der Winkel durch die Projektion nicht verändert werden kann, so ist

$$(k-f)\,4R = 4eR - 8R$$

oder

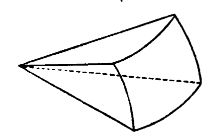
$$e + f = k + 2.$$

Bei nichtkonvexen Körpern können andere Ecken als die, welche auf die Kontur projiciert werden, durch die Projektion Winkelsummen geben, welche nicht gleich $4R$ sind. Hier gilt der Satz deshalb nur mit gewissen Modifikationen, die nicht weiter erwähnt werden sollen.

Die körperliche Ecke.

26. **Eine Ecke** entsteht, wenn man durch einen Punkt (Scheitelpunkt, Spitze) Linien (die Kanten) zieht, und durch Ebenen die erste Kante mit der zweiten, diese mit der dritten ..., die letzte mit der ersten verbindet. Die Winkel ringsum den Scheitelpunkt heifsen die Kantenwinkel oder Seiten der Ecke, die Winkel zwischen den zusammenstofsenden Seitenebenen ihre Winkel. Seiten und Winkel heifsen Stücke (Bestimmungsstücke) der Ecke. Die Ecke heifst konvex, wenn die Seiten und Winkel sämtlich kleiner als 180° sind, andernfalls heifst sie nichtkonvex.

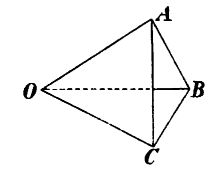
27. Legt man eine Kugel mit ihrem Mittelpunkte auf den Scheitelpunkt der Ecke, so schneiden die Seitenebenen der Ecke die Kugel in Bogen gröfster Kreise, welche ein sphärisches Polygon begrenzen. Die Kantenwinkel der Ecke entsprechen als Centriwinkel den Seiten des Polygons



(hierher rührt die Bezeichnung der Kantenwinkel als Seiten der Ecke). Unter den Winkeln des Polygons versteht man die Winkel zwischen den entsprechenden Seitenebenen; der von diesen gebildete Winkel stimmt überein mit dem Winkel zwischen den Tangenten, welche an die zusammenstofsenden Bogen in ihrem Durchschnittspunkt gezogen sind, denn diese Tangenten stehen senkrecht auf dem an den Durchschnittspunkt gezogenen Radius oder der Kante der Seitenebenen. Eine Untersuchung von Ecken fällt also zusammen mit einer Untersuchung sphärischer Polygone.

28. In einer dreiseitigen Ecke ist die eine Seite kleiner als die Summe der beiden anderen.

Die Ecke sei $O(ABC)$ [der erste Buchstabe bezeichnet den Scheitelpunkt] und ABC sei ein ebener Schnitt, senkrecht auf OB. Wendet man $\triangle BOA$ um BO um, so dafs es mit $\triangle BOC$ in dieselbe Ebene fällt, so entsteht ein Dreieck, das ebenso wie $\triangle AOC$ die Seiten AO und OC hat, dessen dritte Seite $AB + BC$ aber gröfser ist als die dritte Seite des Dreiecks AOC. Folglich ist (Plan. 46)

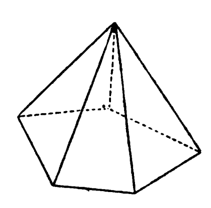


$$\angle BOA + \angle BOC > \angle AOC.$$

29. In einer konvexen Ecke ist die Summe der Seiten kleiner als $4R$.

Wird eine n-seitige Ecke von einer Ebene geschnitten, so wird die Schnittfigur ein n-Eck, dessen Winkelsumme $2nR - 4R$ beträgt, während die Summe der Winkel der n Seitendreiecke $2nR$ beträgt. Diese Winkel sind teils Seiten der Ecke, deren Summe mit S bezeichnet

werden möge, teils die Winkel $g_1, g_2 \dots$ an den Seiten des n-Ecks, deren Summe G heifsen mag. Nun wird dort, wo die Schnittebene eine Kante trifft, eine dreiseitige Ecke gebildet, deren eine Seite (die Ecke als konvex vorausgesetzt) ein Winkel des Polygons ist, während die beiden anderen zwei von den Winkeln g sind. Die Summe der beiden letzteren ist gröfser als die erste (28), und folglich ist die Summe aller Winkel g gröfser als die Summe aller Winkel des Polygons oder



$$G > 2nR - 4R,$$

aber
$$G + S = 2nR,$$

folglich
$$S < 4R.$$

Übungsaufgaben.

1. Eine Ebene schneidet zwei andre Ebenen in parallelen Linien; beweise, dafs sie der Kante der beiden Ebenen parallel ist.
2. Wie bestimmt man eine Ebene, welche eine gegebene vierseitige Ecke in einem Parallelogramm schneidet?
3. Welches ist der geometrische Ort der Punkte, welche gleiche Entfernung von zwei gegebenen Ebenen haben?
4. Wie viele Kugeln kann man konstruieren, die vier gegebene Ebenen berühren? (In der Regel 8).
5. Von einem Punkte werden Senkrechte auf mehrere Ebenen gefällt, deren Durchschnittslinien parallel

sind; beweise, daſs die Senkrechten in derselben Ebene liegen.

6. Legt man senkrecht zu jeder Kante einer dreiseitigen Ecke eine Ebene, so bilden diese drei Ebenen eine neue Ecke; welche Beziehungen finden zwischen den Seiten und Winkeln der beiden Ecken statt?

7. Welches ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche gleiche Entfernung von den drei Kanten einer dreiseitigen Ecke haben?

8. Zwei sich schneidende Ebenen sind gegeben, in der einen ein Punkt A, in der anderen ein Punkt B; man soll auf der Durchschnittslinie einen Punkt X so bestimmen, daſs $\angle AXB = 90°$.

9. Welches ist der geometrische Ort für die Projektion eines Punktes auf eine Ebene, die durch eine gegebene Gerade geht?

10. Wie bestimmt man eine Gerade, welche durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene gerade Linien schneidet?

11. Durch einen Punkt legt man zwei Ebenen, von denen jede auf einer von zwei gegebenen sich schneidenden Geraden senkrecht steht; welchen Winkel bildet die Durchschnittslinie der beiden Ebenen mit der Ebene der beiden gegebenen Geraden?

12. Beweise, daſs die Linien, welche das eine Paar Gegenseiten eines windschiefen Vierecks in proportionale Teile teilen, sämtlich derselben Ebene parallel sind.

13. Im Raume sind mehrere Linien AB, CD, EF ... gegeben. Von einem Punkte O aus zieht man OL gleich und parallel AB, darauf LM gleich und

parallel *CD* u. s. w. Beweise, dafs die so erhaltene gebrochene Linie stets in demselben Punkte endigt, einerlei in welcher Reihenfolge man die gegebenen Linien benutzt.

14. Nach welchem Verhältnis teilen sich die Linien, welche die Mitten der Gegenseiten eines windschiefen Vierecks mit einander verbinden?

15. Wie bestimmt man eine Ebene, welche einer gegebenen Geraden parallel ist und eine zweite gegebene Gerade enthält?

16. Wie bestimmt man in einer gegebenen Ebene eine Gerade, welche durch einen gegebenen Punkt geht und mit einer im Raum gegebenen Geraden einen rechten Winkel bildet?

17. Beweise, dafs eine Gerade, welche mit drei Geraden einer Ebene gleiche Winkel bildet, auf der Ebene senkrecht steht.

18. Gegeben sind eine Ebene und zwei Punkte A und B auf derselben Seite der Ebene. Wie bestimmt man in der Ebene einen Punkt X, so dafs $AX + XB$ so klein wie möglich (ein Minimum) wird?

19. Wie bestimmt man eine Gerade, welche einer gegebenen Geraden parallel ist und zwei andere gegebene Geraden schneidet?

20. Die Abstände der Eckpunkte eines Dreiecks von einer Ebene sind a, b und c; welchen Abstand hat der Schwerpunkt des Dreiecks (Durchschnittspunkt der Medianen) von der Ebene?

21. Ein Lichtstrahl wird von einer Ebene zurückgeworfen. Beweise, dafs die beiden Strahlen mit einer beliebigen Geraden der Ebene gleiche Winkel bilden und gleiche kürzeste Abstände von derselben haben.

22. Beweise, daſs die Mitten aller Linien, welche zwei beliebige Linien im Raume verbinden, in derselben Ebene liegen.

23. Eine Gerade, welche senkrecht auf einer Ebene steht, wird auf eine andere Ebene projiciert; beweise, daſs ihre Projektion senkrecht auf der Spur der ersten Ebene in der zweiten Ebene steht.

24. Von einem Punkte innerhalb einer dreiseitigen Ecke werden Senkrechte auf die Seitenebenen der Ecke gefällt, die eine neue Ecke bestimmen; welche Beziehungen finden zwischen den Seiten und Winkeln der beiden Ecken statt? (Polarecken). (Vergl. Aufg. 6).

25. Jede von den Kanten einer dreiseitigen Ecke wird auf die gegenüberliegende Seitenebene projiciert; beweise, daſs die drei projicierenden Ebenen sich in derselben Geraden schneiden.

Lege eine Ebene senkrecht zu der einen Kante und zeige, daſs die projicierenden Ebenen diese Ebene in den Höhen desjenigen Dreiecks schneiden, welches durch den Durchschnitt der Ebene mit den drei Seitenebenen der Ecke gebildet wird.

26. Durch den Scheitelpunkt einer dreiseitigen Ecke werden drei gerade Linien gezogen, von denen jede in einer Seitenebene liegt und senkrecht auf der gegenüberliegenden Kante steht; beweise, daſs die drei Linien in derselben Ebene liegen (Aufg. 25).

27. Eine rechtwinklige Ecke O wird von einer Ebene in einem Dreieck ABC geschnitten. O wird auf ABC in S projiciert; beweise, daſs das Dreieck AOB die mittlere Proportionale zwischen den Dreiecken ACB und ASB ist.

28. In einem Tetraeder wird eine Linie von einem Eckpunkt bis an den Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche gezogen; beweise, dafs diese Linie und diejenige, welche die Mitten von zwei gegenüberliegenden Kanten verbindet, sich schneiden. Nach welchem Verhältnis teilen sich die beiden Linien? Welche sieben Linien müssen sich hiernach stets in einem Punkte schneiden? (Schwerpunkt des Tetraeders).

29. Zwei auf einander senkrechte Linien einer Ebene werden auf eine zweite Ebene projiciert, die mit der ersten den Winkel φ bildet. Die Projektionen bilden mit der Durchschnittslinie der Ebenen die Winkel α und β. Wie läfst sich $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$ durch φ ausdrücken?

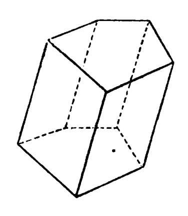
30. Eine Strecke von gegebener Länge gleitet mit ihren Endpunkten auf zwei Geraden, die auf einander senkrecht stehen, aber nicht in derselben Ebene liegen; beweise, dafs der geometrische Ort für die Mitte der Strecke ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt die Mitte des kürzesten Abstandes der beiden Geraden ist, und dessen Ebene senkrecht auf diesem Abstande steht.

Zweites Kapitel.

Polyeder und runde Körper.

Prismen und Cylinder.

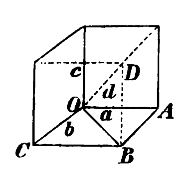
30. **Das Prisma.** Durch die Endpunkte eines ebenen n-Ecks werden Parallelen gezogen, durch je zwei aufeinander folgende von diesen werden Ebenen gelegt, und durch diese wird eine Schnittebene gelegt, die der Ebene des Polygons parallel ist. Der auf solche Art abgegrenzte Körper heifst ein n-seitiges Prisma. Dasselbe wird von n Parallelogrammen (16) [den Seitenflächen] und von zwei n-Ecken (den Grund- oder Endflächen) begrenzt. Die Grundflächen sind kongruent, da die homologen Seiten derselben gleich und parallel sind (14). Durch homologe Diagonalen der Grundflächen kann man Diagonalebenen des Prismas legen. Der Abstand der Grundflächen ist die Höhe des Prismas. Stehen die Seitenkanten (und also auch die Seitenflächen) senkrecht auf der Grundfläche, so heifst das Prisma gerade, anderenfalls schief. Eine Ebene, senkrecht auf den Kanten eines geraden oder schiefen Prismas, bestimmt den Normalschnitt des Prismas. Sind die Grundflächen eines



geraden Prismas reguläre Polygone, so heifst dasselbe regelmäfsig. Sind die Ebenen der beiden Grundflächen einander nicht parallel, so erhält man ein schiefabgeschnittenes Prisma (Prismenstumpf).

31. **Ein Parallelepipedon** (Parallelflächner) ist ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind; dasselbe wird also von 6 Parallelogrammen begrenzt. Von den 12 Kanten sind je 4 gleich grofs, so dafs das Parallelepipedon durch die Gröfse und Richtung dreier von einer Ecke auslaufenden Kanten bestimmt ist. Die vier Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, schneiden sich in demselben Punkte, dem Mittelpunkte des Parallelepipedons, denn je zwei derselben sind Diagonalen eines Parallelogramms.

Das gerade Parallelepipedon heifst rechtwinklig, wenn die Grundflächen Rechtecke sind, so dafs dasselbe von 6 Rechtecken begrenzt wird. In jeder Ecke sind sowohl Seiten wie Winkel Rechte; eine solche Ecke heifst rechtwinklig. Ein Würfel oder Kubus wird von 6 Quadraten begrenzt.



Sind die drei von einer Ecke eines rechtwinkligen Parallelepipedons auslaufenden Kanten a, b und c, so wird die Diagonale OB der einen Seitenfläche gleich $\sqrt{a^2 + b^2}$, aber OB, BD und OD bilden ein rechtwinkliges Dreieck, so dafs die Diagonale des Parallelepipedons $OD = d$ bestimmt wird durch

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2. \tag{5}$$

Die Projektionen von d auf die drei von O auslaufenden Kanten sind a, b und c; bezeichnet man also die Winkel

zwischen diesen und der Diagonale mit α, β und γ, so hat man (22)

$$a = d \cos \alpha; \quad b = d \cos \beta; \quad c = d \cos \gamma. \tag{6}$$

Hat man eine rechtwinklige Ecke O und eine beliebige Gerade durch O, so kann man auf dieser einen Punkt D wählen, und dadurch ist dann das rechtwinklige Parallelepipedon OD bestimmt. Aus (6) erhält man dann

$$\cos \alpha = \frac{a}{d}; \quad \cos \beta = \frac{b}{d}; \quad \cos \gamma = \frac{c}{d};$$

quadriert und addiert man diese Gleichungen, so erhält man unter Benutzung von (5)

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma. \tag{7}$$

Es ist also die Summe der Quadrate der coss. derjenigen Winkel, welche eine beliebige Gerade mit den Kanten einer rechtwinkligen Ecke bildet, gleich 1.

OD_1 sei eine andere Gerade, welche mit OD den Winkel u bildet, während ihre Winkel mit den Kanten der rechtwinkligen Ecke bezw. α_1, β_1 und γ_1 sind. Nun ist es gleichgültig ob man auf OD_1 die OD oder die gebrochene Linie $OABD$ projiciert; dadurch erhält man

$$d \cos u = a \cos \alpha_1 + b \cos \beta_1 + c \cos \gamma_1$$

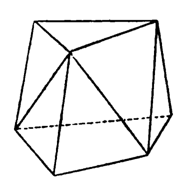
oder, wenn man die Werte von a, b und c einsetzt,

$$\cos u = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1. \tag{8}$$

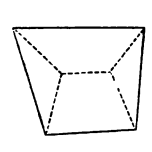
Diese Formel dient zur Bestimmung des Winkels zwischen zwei Geraden, wenn man die Winkel kennt, welche diese beiden Geraden mit den Kanten einer rechtwinkligen Ecke bilden.

32. **Das Prismatoid** ist ein Polyeder, welches von zwei parallelen Endflächen begrenzt wird, die beliebige

Polygone sein können, und von Dreiecken, von denen jedes eine Seite mit einer der Endflächen gemeinsam hat, während die gegenüberliegende Ecke auf einen Eckpunkt der anderen Endfläche fällt. Zwei an einander stofsende Dreiecke können in dieselbe Ebene fallen und ein Trapez bilden. Die eine Endfläche kann auf eine gerade Linie reduciert werden, wodurch man ein dachförmiges Prismatoid erhält.

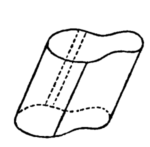


Ein Prismatoid, dessen Endflächen gleich viele, paarweise parallele Kanten haben, und dessen Seitenflächen Trapeze sind, heifst ein Obelisk. Sind die Endflächen des Prismatoids kongruente Polygone, deren homologe Seiten nicht parallel sind, und sind die Seitenflächen Dreiecke, deren Spitzen und Grundlinien abwechselnd in den beiden Endflächen liegen, so heifst das Prismatoid ein Antiprisma.



33. **Der Cylinder.** Die Fläche, welche von einer geraden Linie (der Erzeugenden, Seitenlinie) beschrieben wird, die sich parallel einer gegebenen Geraden so bewegt, dafs sie beständig eine gegebene Kurve (die Leitlinie) schneidet, heifst eine Cylinderfläche.

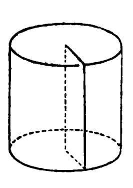
Ein Cylinder wird begrenzt von einer Cylinderfläche und von zwei Endflächen, deren Ebenen parallel sind. Der Cylinder läfst sich als ein Prisma mit unendlich vielen Seitenflächen auffassen. Die Endflächen des Cylinders sind deshalb kongruent.



Ist die Leitlinie des Cylinders ein Kreis, so heifst

derselbe ein **gemeiner** Cylinder oder ein Kreiscylinder. Die Linie, welche die Mittelpunkte der Endflächen verbindet (und welche wie leicht ersichtlich der Erzeugenden parallel ist), heifst die Axe des Cylinders. Die Bezeichnungen gerade, schief, Höhe u. s. w. werden wie beim Prisma gebraucht.

Der gerade Kreiscylinder kann durch Umdrehung eines Rechtecks um eine seiner Seiten hervorgebracht werden. Solche Flächen, welche durch Umdrehung um eine Gerade hervorgebracht werden können, heifsen **Umdrehungsflächen** (Rotationsflächen).



34. Eine Ebene, welche der Erzeugenden parallel ist, wird eine Cylinderfläche in zwei Seitenlinien schneiden; fallen zwei solche Durchschnittslinien zusammen, so wird die Ebene eine **Berührungsebene** und berührt den Cylinder in einer Seitenlinie. Die Berührungsebene eines Kreiscylinders hat nur die Seitenlinie, in der sie berührt, mit dem Cylinder gemein. **Die Berührungsebene schneidet die Ebenen der Endflächen in geraden Linien, welche Tangenten der Peripherien der Endflächen sind,** da sie zwei zusammenfallende Punkte mit diesen gemeinsam haben.

Nimmt man einen gröfsten Kreis einer Kugel zur Leitlinie für eine Umdrehungscylinderfläche, so wird diese der Kugel **umbeschrieben**; jede Seitenlinie berührt die Kugel, und jede Berührungsebene des Cylinders ist auch Berührungsebene der Kugel. Nur Cylinder, deren Normalschnitte Kreise sind, lassen sich um Kugeln beschreiben.

Pyramiden und Kegel.

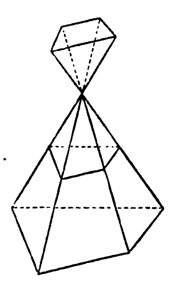
35. **Die Pyramide** wird begrenzt von einem beliebigen ebenen Polygon (der Grundfläche) und von dreieckigen Seitenflächen, deren Grundlinien die Seiten der Grundfläche sind, während sie eine gemeinsame Spitze, die Spitze der Pyramide, haben (vergl. die Figur zu 29). Der Abstand der Spitze von der Grundfläche ist die Höhe der Pyramide. Ist die Grundfläche ein reguläres Polygon, und fällt der Fuſspunkt der Höhe auf den Mittelpunkt der Grundfläche, so heiſst die Pyramide regelmäſsig. In dieser sind alle Seitenkanten gleich lang.

Eine n-seitige Pyramide läſst sich durch Diagonalebenen in $n-2$ dreiseitige Pyramiden zerlegen, da die Grundfläche sich in $n-2$ Dreiecke zerlegen läſst.

Ein Tetraeder ist eine dreiseitige Pyramide; dasselbe wird von vier Dreiecken begrenzt, von denen jedes als Grundfläche betrachtet werden kann.

36. Eine der Grundfläche parallele Ebene schneidet die Pyramide in einem Polygon, welches der Grundfläche ähnlich ist.

Die homologen Seiten der beiden Polygone sind parallel (16) und die homologen Winkel deshalb gleich groſs (14). Das Verhältnis zweier homologer Seiten ist gleich dem konstanten Verhältnis zwischen den Abschnitten, welche die beiden Ebenen auf einer beliebigen Geraden von der Spitze aus abschneiden (z. B. auf der Höhe).



Sind die Höhen in der gegebenen

und in der durch die Ebene abgeschnittenen Pyramide H und h, so wird das lineare Verhältnis zwischen der Grundfläche und dem Schnitt $H:h$. Sind die Flächeninhalte der Grundfläche und des Schnitts G und g, so ist

$$\frac{G}{g} = \frac{H^2}{h^2}, \quad \text{also} \quad g = \frac{h^2}{H^2} G.$$

Hat man zwei Pyramiden von gleicher Höhe und Grundfläche, so zeigt der Ausdruck für g, dafs Ebenen, welche der Grundfläche in derselben Entfernung von der Spitze parallel sind, die beiden Pyramiden in Polygonen von demselben Flächeninhalt schneiden.

Der Teil einer Pyramide, welcher zwischen der Grundfläche und einer ihr parallelen Ebene liegt, heifst ein *Pyramidenstumpf*. Die Seitenflächen der Pyramiden lassen sich über die Spitze hinaus erweitern; schneidet die Ebene diese Erweiterungen, so erhält man einen *Stumpf der zweiten Art*; derselbe ist gleich der Summe zweier Pyramiden, während der *von erster Art* gleich der Differenz von zwei Pyramiden ist. Ein *schiefabgeschnittener* Pyramidenstumpf entsteht durch eine Ebene, welche der Grundfläche nicht parallel ist.

37. **Die Kegelfläche.** Wenn eine Gerade (die Erzeugende) sich so bewegt, dafs sie beständig durch einen festen Punkt (Spitze oder Scheitel) geht und eine gegebene Kurve (die Leitlinie) schneidet, so beschreibt sie eine *Kegelfläche*. Ist die Leitlinie ein Kreis, so heifst die Fläche eine *Kreiskegelfläche*; steht die Linie von der Spitze bis an den Mittelpunkt des Kreises senkrecht auf der Ebene des Kreises, so wird die Kegel-

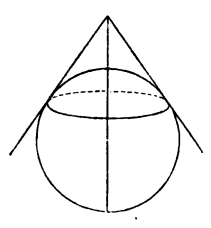
fläche eine Umdrehungsfläche, denn die Erzeugende bildet mit dieser Linie, welche die Drehungsaxe ist, stets denselben Winkel (die Hälfte des Winkels an der Spitze der Kegelfläche).

38. Ein **Kegel** wird von einer Kegelfläche und einer Ebene (der Grundfläche) begrenzt; derselbe ist gerade, wenn die krumme Oberfläche eine Umdrehungskegelfläche ist und die Höhe mit der Axe zusammenfällt, andernfalls schief. Alle Seitenlinien des geraden Kegels sind gleich grofs. Dreht sich ein rechtwinkliges Dreieck um seine eine Kathete, so entsteht ein gerader Kegel. Der Kegel ist eine Pyramide mit unendlich vielen Seitenflächen. Eine der Grundfläche parallele Ebene schneidet deshalb den Kegel in einem Schnitt, welcher der Grundfläche ähnlich ist. Der Inhalt dieses Schnitts wird wie bei der Pyramide bestimmt.

Ein Kegelstumpf und ein schief abgeschnittener Kegelstumpf werden ebenso wie bei der Pyramide hergestellt.

Cylinder- und Kegelflächen werden durch die Bewegung einer Geraden beschrieben und heifsen deshalb geradlinige Flächen (Regelflächen).

39. Läfst man einen Halbkreis und eine an diesen von einem Punkte des Durchmessers gezogene Tangente sich um den Durchmesser drehen, so entsteht eine Kugel mit einer umbeschriebenen Kreiskegelfläche. Da man in jeder Lage der sich drehenden Ebene von dem gegebenen Punkte nur eine Tangente an den Halbkreis ziehen kann,



so kann man um die Kugel nur eine Kegelfläche beschreiben, die ihre Spitze in dem gegebenen Punkte hat. Dieselbe berührt die Kugel in dem Kreise, welcher von dem Berührungspunkte der Tangente und des Halbkreises beschrieben wird; die Ebene dieses Kreises steht senkrecht auf dem Durchmesser; eine zu dieser durch den einen Endpunkt des Durchmessers gezogene parallele Ebene schneidet die Kegelfläche in einem Kreise, der Grundfläche eines Kegels ist, in den die Kugel beschrieben ist. Man sieht hieraus, dafs eine Kugel sich nur in einen Kegel beschreiben läfst, dessen krumme Oberfläche eine Umdrehungskegelfläche ist.

Die Berührungsebene des Kegels wird ebenso wie die des Cylinders bestimmt; dieselbe berührt den Kegel in der ganzen Länge einer Erzeugenden und enthält also auch die Spitze; die Berührungsebene eines geraden Kegels berührt auch die einbeschriebene Kugel.

40. Zwei Umdrehungskegelflächen mit gemeinschaftlicher Spitze schneiden sich in der Regel in zwei Erzeugenden. Legt man nämlich eine Kugel mit ihrem Mittelpunkte auf die gemeinschaftliche Spitze, so werden die beiden Kegelflächen diese in zwei Kreisen schneiden, deren Durchschnittspunkte die beiden Erzeugenden bestimmen. Fallen die beiden Erzeugenden in eine zusammen, so berühren die beiden Kegelflächen sich in dieser. Die Kegelflächen können auch ganz aufserhalb einander, oder die eine kann in die andere fallen.

Eine Umdrehungskegelfläche, deren Axe durch den Mittelpunkt einer Kugel geht, schneidet die Kugel in zwei Kreisen, nämlich in den beiden Kreisen, welche bei der Drehung von den beiden Punkten beschrieben

werden, in denen eine Erzeugende des Kegels einen gröſsten Kreis der Kugel schneidet.

Die Kugel.

41. **Gröſste Kreise (Hauptkreise) und Pole.** Die Untersuchung der Figuren auf einer Kugelfläche führt zu einer Geometrie auf der Kugel, welche der Geometrie in der Ebene analog ist. Auf der Kugel betrachtet man namentlich Hauptkreise, welche den geraden Linie in der Ebene analog werden, da ein Hauptkreis durch zwei Punkte bestimmt ist; diese und der Mittelpunkt der Kugel bestimmen nämlich die Ebene des Hauptkreises. Hiervon ist der Fall ausgenommen, wo die beiden Punkte die Endpunkte eines Kugeldurchmessers sind; durch diese und einen beliebigen dritten Punkt läſst sich ein Hauptkreis legen.

42. Die Endpunkte eines Durchmessers heiſsen Pole für alle diejenigen Kreise, welche beim Durchschnitt der Kugel mit Ebenen, senkrecht auf dem Durchmesser, entstehen. Ein solcher Kreis wird von einem seiner Punkte durch Drehung um den Durchmesser, welcher die Pole verbindet, beschrieben. Alle Bogen von Hauptkreisen, welche die Punkte eines solchen Kreises mit dem nächsten Pol verbinden, sind also gleich groſs und heiſsen die sphärischen Radien des Kreises.

43. Legt man einen Hauptkreis durch zwei Punkte, so werden diese durch zwei Hauptkreisbogen verbunden, deren Summe gleich der Peripherie des ganzen Hauptkreises ist; der kleinere von diesen heiſst der sphärische Abstand (oder bloſs Abstand) der beiden Punkte. Durch ein Verfahren, welches dem bei geraden Linien

in der Ebene angewandten analog ist, läfst sich zeigen dafs dieser kürzer ist als jeder andere von Hauptkreisbogen zwischen den beiden Punkten gebildete Weg (Plan. 40).

Der Winkel zwischen zwei Hauptkreisen ist, wie früher angegeben, der Winkel zwischen ihren Ebenen. *Der Winkel zweier Hauptkreise ist ein Rechter, wenn sie gegenseitig durch ihre Pole gehen* (19). Ein Hauptkreis kann also nicht durch die Pole eines anderen gehen, ohne dafs dieser durch die Pole des ersten geht.

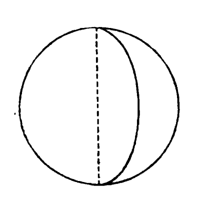
Da die sphärische Senkrechte auf einem Hauptkreise durch dessen Pol geht, so ist dieselbe durch einen zweiten Punkt bestimmt. Eigentlich gehen zwei Senkrechte durch einen solchen Punkt, die eine kleiner, die andere gröfser als 90°. Wenn von Senkrechten gesprochen wird, so meint man in der Regel die erstere.

P sei ein Punkt eines Hauptkreises, A ein Punkt aufserhalb desselben. Liegt A im Pol, so wird AP gleich 90° und steht senkrecht auf dem Hauptkreise. Ist A nicht der Pol, so wird AP am kleinsten, wenn sie die spitze, am gröfsten, wenn sie die stumpfe Senkrechte ist; sie wächst, wenn P aus der ersten von diesen Lagen in die zweite übergeht, und symmetrischen Lagen auf beiden Seiten der Senkrechten entsprechen gleich grofse Bogen AP. Diese Sätze sind dieselben wie die in 10 entwickelten, da der Bogen AP ein Mafs für den Winkel AOP ist (hier ist P ein anderer Punkt als oben, aber auf demselben Radius).

Es lassen sich also von einem Punkte an einen Hauptkreis zwei gleich grofse Schiefe (Hauptkreisbogen) *ziehen; diese weichen um*

gleichviel von der Senkrechten ab und bilden mit dem gegebenen Hauptkreise ein gleichschenkliges sphärisches Dreieck; die Winkel an der Grundlinie dieses Dreiecks sind gleich grofs.

44. Zwei Hauptkreise schneiden sich in diametral entgegengesetzten Punkten; ein Halbkreis des einen und ein Halbkreis des anderen bilden ein sphärisches Zweieck; die Seiten desselben sind 180°, die Winkel desselben gleich grofs, nämlich gleich dem Winkel der Hauptkreisebenen und gleich dem (sphärischen) Abstande der Seitenmitten. Die Ebenen der beiden Halbkreise schneiden aus der Kugel einen sogenannten Keilausschnitt heraus.



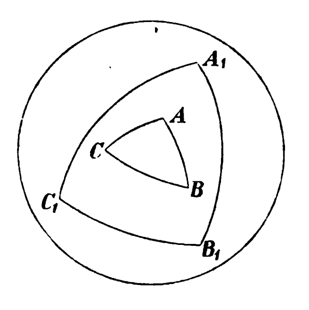
Die Pole der Seiten eines Zweiecks bestimmen einen Hauptkreis, dessen Pole, da sie in beiden Seiten des Zweiecks liegen müfsen (43), die Ecken des Zweiecks sind. Wählt man für jede der Seiten den Pol, der nach derselben Seite wie das Zweieck (in einem Abstand von 90°) liegt, so wird der Abstand zwischen den beiden Polen das Supplement zum Winkel des Zweiecks (nämlich das Supplement zum Abstande der Seitenmitten).

45. **Sphärische Dreiecke.** Von sphärischen Dreiecken werden namentlich solche betrachtet, deren Seiten sämtlich kleiner sind als 180°, d. h. solche, deren entsprechende dreiseitige Ecken (26) konvex sind. Einer rechtwinkligen Ecke entspricht ein Dreieck, dessen Seiten und Winkel sämtlich 90° betragen. Sind zwei Winkel oder Seiten eines Dreiecks beide 90°, so sieht

man leicht, dafs der Durchschnittspunkt der beiden Seiten der Pol der dritten Seite ist; vier von den Stücken des Dreiecks werden dann gleich 90°, während die dritte Seite und der dritte Winkel gleich grofs werden.

Verlängert man die eine Seite eines Dreiecks bis zu einem Vollkreise und die beiden anderen, bis sie diesen wiederum schneiden, so erhält man drei neue Dreiecke, welche in Verbindung mit dem ersten eine Halbkugel bedecken. Man sieht leicht, dafs Seiten und Winkel in zwei solchen Dreiecken einander paarweise derartig entsprechen, dafs die gepaarten entweder gleich grofs oder Supplemente sind.

46. **Polardreiecke.** Bestimmt man für jede Seite eines Dreiecks denjenigen Pol, welcher nach derselben Seite wie das Dreieck liegt, so sind die drei Pole die Eckpunkte eines neuen Dreiecks $A_1 B_1 C_1$. Aus diesem Dreiek läfst sich das erste auf dieselbe Weise bestimmen. A wird nämlich Pol für $B_1 C_1$, denn die Pole dieser Seite sind die Durchschnittspunkte derjenigen Kreise, deren Pole B_1 und C_1 sind (44). Zugleich ist A eben der Pol von $B_1 C_1$, der nach derselben Seite wie das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ liegt, denn A und A_1 müssen immer auf dieselbe von den beiden Halbkugeln fallen, welche durch $B_1 C_1$ oder durch BC bestimmt werden.



Jedes der beiden Dreiecke heifst das Polardreieck des anderen; beide besitzen, nach dem in 44 darge-

stellten, die Eigenschaft, dafs die Seiten des einen die Supplemente der Winkel des anderen sind, und umgekehrt.

Hieraus folgt, dafs man aus jedem für die Stücke eines sphärischen Dreiecks bewiesenen Satze einen neuen Satz dadurch bilden kann, dafs man in dem bewiesenen «Seite» mit «Supplement des Winkels» und «Winkel» mit «Supplement der Seite» vertauscht. Aus dem bewiesenen Satze

$$a + b + c < 4R$$

folgt in der Weise der neue

$$2R - \alpha + 2R - \beta + 2R - \gamma < 4R$$

oder

$$\alpha + \beta + \gamma > 2R.$$

Aus

$$a + b + c > 0$$

folgt

$$\alpha + \beta + \gamma < 6R.$$

Die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks liegt also zwischen $2R$ und $6R$. Der Überschufs der Winkelsumme über $2R$ heifst der sphärische Excefs.

Den Polardreiecken entsprechen die dreiseitigen Polarecken. Die Polarecke einer dreiseitigen Ecke läfst sich auch (doch in veränderter Lage) durch Ebenen herstellen, welche auf den Kanten der gegebenen Ecke senkrecht stehen.

Reguläre Polyeder.

47. **Ein reguläres Polyeder** ist ein solches, welches durch Drehung um einen gewissen Punkt, den Mittelpunkt, mit sich selbst zur Deckung gebracht werden kann, indem man einen beliebigen Eckpunkt mit einem beliebigen anderen Eckpunkt zusammenfallen läfst und eine beliebige Seitenfläche der ersten Ecke auf eine

beliebige Seitenfläche der zweiten Ecke legt. Hieraus folgt wieder:

Alle Seitenflächen sind kongruente reguläre Polygone.

Alle Flächenwinkel des Körpers sind gleich grofs.

Der Mittelpunkt des Körpers ist zugleich der Mittelpunkt einer einbeschriebenen und einer umbeschriebenen Kugel.

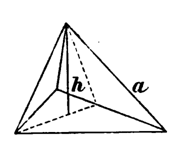
Diese Bedingungen bringen es mit sich, dafs es nur fünf reguläre Polyeder geben kann. Da die Summe der Seiten einer Ecke kleiner als $4R$ sein mufs, so kann man aus gleichseitigen Dreiecke nur drei-, vier- und fünfseitige Ecken bilden; aus Quadraten und regelmäfsigen Fünfecken lassen sich aus demselben Grunde nur dreiseitige Ecken herstellen, und aus regelmäfsigen Figuren von mehr als fünf Seiten lassen sich konvexe Ecken überhaupt nicht bilden. Es soll nun gezeigt werden, dafs die fünf regulären Polyeder, deren Möglichkeit durch den Satz von der Seitensumme nicht ausgeschlossen ist, auch wirklich existieren.

48. Legt man Berührungsebenen an die um einen regelmäfsigen Körper beschriebene Kugel in den Eckpunkten des Körpers, so begrenzen diese einen neuen regelmäfsigen Körper mit demselben Mittelpunkt wie der gegebene; derselbe wird nämlich jedesmal mit sich zur Deckung gebracht werden, sobald der gegebene Körper mit sich zur Deckung gebracht wird. Ist das umbeschriebene Polyeder gegeben, so wird das einbeschriebene durch die Berührungspunkte der Seitenflächen mit der Kugel bestimmt. Die beiden Körper heifsen

reciprok, da sie aus einander auf dieselbe Weise gebildet werden.

Der Konstruktion zufolge erhält jeder der beiden Körper ebensoviele Seitenflächen wie der andere Ecken hat. Eine Drehung zeigt nämlich, dafs alle Berührungsebenen an die Eckpunkte einer Seitenfläche sich in demselben Punkte schneiden. Hieraus folgt, dafs die beiden Körper gleich viele Kanten haben (25). Der Flächenwinkel des umbeschriebenen Polyeders wird das Supplement desjenigen Winkels, unter dem eine Kante des einbeschriebenen Körpers vom Mittelpunkte aus gesehen wird, denn von den beiden an die Endpunkte der Kante gezogene Radien steht jeder senkrecht auf der zugehörigen Berührungsebene.

49. **Das reguläre Tetraeder.** Im Mittelpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a wird eine Senkrechte errichtet, deren Länge h derartig bestimmt wird, dafs der Abstand ihres Endpunktes von einer der Ecken des Dreiecks gleich a ist. Der auf diese Weise bestimmte Punkt und die Eckpunkte des Dreiecks sind dann die Eckpunkte eines regulären Tetraeders, dessen Seitenflächen vier gleichseitige Dreiecke mit der Seite a sind. Das Tetraeder hat nämlich eine umbeschriebene Kugel (9), und man sieht leicht, dafs es durch Drehung um den Mittelpunkt dieser auf die oben angegebene Weise mit sich selbst zur Deckung gebracht werden kann.



Eine senkrecht auf der Mitte einer Kante stehende Ebene enthält die gegenüberliegende Kante (5); der dadurch entstandene Schnitt ist dann ein gleichschenk-

liges Dreieck mit den Schenkeln $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ und der Grundlinie a. Die Höhe auf einem der Schenkel ist gleich h, und der Durchschnittspunkt der Höhen ist der Mittelpunkt. Der Flächenwinkel $2v$ ist der Winkel an der Spitze dieses Dreiecks, während der Winkel an der Grundlinie den Winkel zwischen einer Kante und einer Seitenfläche darstellt. Hieraus bestimmt man nun leicht, wenn ρ und r die Radien der ein- und umbeschriebenen Kugel bedeuten,

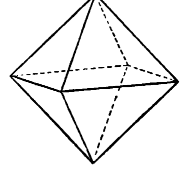
$$\sin v = \sqrt{\frac{1}{3}}\,; \quad h = a\sqrt{\frac{2}{3}}\,; \quad \rho = \frac{1}{4}h\,; \quad r = \frac{3}{4}h.$$

Die an die Eckpunkte des einbeschriebenen Tetraeders gelegten Berührungsebenen bestimmen wieder ein Tetraeder.

50. **Kubus und Oktaeder.** Ein Würfel oder Kubus ist ein rechtwinkliges Parallelepipedon, welches von sechs Quadraten begrenzt wird und lauter rechte Flächenwinkel hat. Ist die Kante a, so wird

$$\rho = \frac{a}{2}\,; \quad r = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

51. Das Oktaeder entsteht aus dem Würfel, indem man Berührungsebenen an die umbeschriebene Kugel legt; da der Würfel 8 Ecken und als Seitenflächen 6 Quadrate hat, so erhält das Oktaeder 6 vierseitige Ecken, und seine Seitenflächen werden 8 gleichseitige Dreiecke; beide Körper haben 12 Kanten.



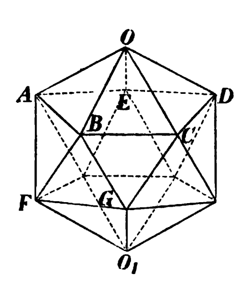
Ein durch die Mittelpunkte von zwei gegenüberliegenden Quadraten gezogener Durchmesser geht durch zwei gegenüberliegende Ecken des Oktaeders, denn eine Drehung um 90° um diesen Durchmesser bringt den Würfel und deshalb

auch das Oktaeder zur Deckung mit sich selbst; durch eine solche Drehung müssen dann auch die 4 übrigen Eckpunkte des Oktaeders zur Deckung mit einander gelangen; sie sind deshalb Eckpunkte eines Quadrats. Ein Oktaeder läſst sich also auf drei Arten in zwei vierseitige Pyramiden zerlegen, die ein Quadrat zur gemeinschaftlichen Grundfläche haben und deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind.

Ist a die Kante des Oktaeders, so bestimmt eine senkrecht zur Mitte dieser Kante gelegte Ebene ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ und der Grundlinie $a\sqrt{2}$. r ist gleich der halben Grundlinie, ρ gleich der von der Mitte der Grundlinie auf einen Schenkel gefällten Senkrechten; der Flächenwinkel $2v$ ist gleich dem Winkel an der Spitze; hieraus erhält man:

$$\sin v = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \rho = a\frac{\sqrt{6}}{6}; \quad r = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

52. **Ikosaeder und Dodekaeder.** Das Ikosaeder hat fünfseitige Ecken und wird von zwanzig gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Um dasselbe zu konstruieren, konstruiert man zuerst eine regelmäſsige fünfseitige Pyramide O-$ABCDE$, deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke mit der Kante a sind. Um diese Pyramide wird eine Kugel beschrieben; der Mittelpunkt derselben fällt auf die Axe der Pyramide.



Eine der konstruierten kongruente fünfseitige Pyramide lege man so mit ihrer Spitze auf eine der Ecken (B) an der Grundfläche der ersten Pyra-

mide, dafs zwei von den Seitenflächen zwei Seitenflächen der ersten Pyramide decken, wahrend die drei übrigen Seitenflächen frei liegen. Dreht man nun diese Pyramide um die Axe der ersten Pyramide um den fünften Teil einer ganzen Umdrehung, und so fort, so werden in jeder Lage zwei Seitenflächen mit zweien der festen Pyramide zusammenfallen und zwei mit zweien in der vorhergehenden Lage der beweglichen Pyramide. Läfst man die um die bewegliche Pyramide beschriebene Kugel die Bewegung der Pyramide mitmachen, so wird dieselbe beständig vier Punkte mit der um die feste Pyramide beschriebenen Kugel gemeinsam haben und also beständig mit dieser zusammenfallen.

Die beiden freien Ecken der Grundfläche der beweglichen Pyramide (F und G) fallen bei der Bewegung nach und nach auf alle Eckpunkte eines regelmäfsigen Fünfecks, und da dieses dieselbe Seite erhält wie die Grundfläche der festen Pyramide, so ist es dieser kongruent.

Nun hat man einen Körper, der aus einer fünfseitigen Pyramide besteht, welche auf ein Antiprisma gesetzt ist, defsen Seitenflächen aus zehn gleichseitigen Dreiecken bestehen; legt man nun die bewegliche Pyramide mit ihrer Spitze so auf einen Eckpunkt G des neuen regelmäfsigen Fünfecks, dafs drei von den Seitenflächen drei Seitenflächen des Antiprismas decken, so werden zwei Seitenflächen frei; durch eine Bewegung, wie die oben geschilderte, fällt die eine von diesen auf die andere, und so fort; der Endpunkt O_1 der ihnen gemeinsamen Seite mufs deshalb liegen bleiben, und die Bewegung bringt also eine neue fünfseitige Pyramide hervor, welche der ersten kongruent ist. Der

au solche Weise konstruierte Körper heifst **Ikosaeder**. Derselbe ist regelmäfsig, da alle Ecken nach und nach zur Deckung mit einander gelangt sind, ohne dafs die umbeschriebene Kugel verändert wurde. Er hat zwölf Ecken und läfst sich auf sechs Arten in zwei fünfseitige Pyramiden und ein Antiprisma mit zehn Seitenflächen zerlegen.

53. Um den Flächenwinkel zu bestimmen lege man einen Schnitt senkrecht zur Mitte einer Kante; dadurch wird ein gleichschenkliges Dreieck bestimmt, dessen Schenkel gleich $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, während die Grundlinie Diagonale in dem regelmäfsigen Fünfeck mit der Seite a ist; die letztere ist $2a \cos 36°$; der halbe Flächenwinkel wird also bestimmt durch

$$\sin v = \frac{2 \cos 36°}{\sqrt{3}}.$$

Eine Ebene, senkrecht auf der Mitte einer der Seitenkanten der Pyramide, schneidet die Axe der Pyramide im Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel; ist u der Winkel, den die Kante mit der Axe bildet, so wird

$$\frac{a}{2} = r \cos u;$$

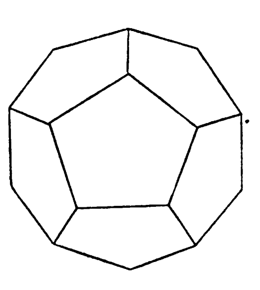
man hat indessen, wenn r_1 den grofsen Radius des Fünfecks bedeutet,

$$a = 2r_1 \sin 36°; \quad \sin u = \frac{r_1}{a} = \frac{1}{2 \sin 36°}.$$

Hierdurch ist also r bestimmt. ρ bestimmt sich leicht, da er Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Hypotenuse r ist, während die andere Kathete vom grofsen Radius einer Seitenfläche gebildet wird.

54. **Das Dodekaeder.** Das Ikosaeder hat 12 Ecken, 20 Seitenflächen und 30 Kanten; die Berüh-

rungsebenen an die umbeschriebene Kugel bestimmen also einen regelmäſsigen Körper mit 20 dreiseitigen Ecken, 12 Seitenflächen (regelmässigen Fünfecken) und 30 Kanten. Derselbe läſst sich darstellen, indem man ein offenes Kästchen bildet, dessen Boden ein regelmäſsiges Fünfeck ist, während die Seitenwände 5 andere diesem kongruente Fünfecke sind; schlieſst man das Kästchen durch einen auf dieselbe Weise gebildeten Deckel, so hat man das Dodekaeder.



Der Flächenwinkel ist das Supplement des Winkels, unter welchem die Kante des Ikosaeders vom Mittelpunkt aus erscheint (48); dieser ist das Doppelte des Komplementwinkels des oben bestimmten Winkels u, so daſs u der halbe Flächenwinkel ist. Der Winkel, unter dem eine Kante vom Mittelpunkt aus gesehen wird, beträgt $180° - 2v$, so daſs r bestimmt wird durch

$$\frac{a}{2} = r \cos v\,;$$

ρ findet man nun wie beim Ikosaeder.

Die fünf regelmäſsigen Körper, deren Existenz auf diese Weise bewiesen ist, heiſsen auch Platonische Körper.

Übungsaufgaben.

31. Was für eine Figur entsteht, wenn man durch einen Würfel einen ebenen Schnitt senkrecht auf der Mitte einer seiner Diagonalen legt?

32. Eine Pyramide wird von einer Ebene geschnitten, die der Grundfläche nicht parallel ist; die Seiten der Schnittfigur werden verlängert bis sie die entsprechenden Seiten der Grundfläche schneiden; beweise, dafs die Durchschnittspunkte auf einer Geraden liegen. Welcher planimetrische Satz läfst sich hieraus ableiten, wenn man eine dreiseitige Pyramide von unendlich kleiner Höhe betrachtet?

33. Beweise, dafs der Flächeninhalt der einen Seitenfläche eines dreiseitigen Prismas kleiner ist als die Summe der Inhalte der beiden anderen.

34. Eine Ebene, welche einen Flächenwinkel eines Tetraeders halbiert, teilt die gegenüberliegende Seite in Abschnitte, die sich wie die Inhalte der den Flächenwinkel bildenden Seitenflächen verhalten.

35. Wie bestimmt man eine Gerade, welche denselben Winkel mit drei Ebenen bildet, von denen zwei nicht parallel sind?

36. Im Tetraeder S-ABC schneidet die durch S gelegte Gerade, welche gleiche Neigung gegen die drei Seitenflächen hat, die Grundfläche in O; beweise, dafs die Dreiecke OAB, OBC und OCA sich wie die Seitenflächen verhalten.

37. Durch ein Tetraeder wird ein Schnitt parallel der Grundfläche gelegt; die Mitten der Seiten der Schnittfläche werden mit den gegenüberliegenden Ecken der Grundfläche verbunden; beweise, dafs diese drei Linien sich in einem Punkte schneiden, und bestimme den geometrischen Ort dieses Punktes.

38. Beweise, dafs die Summe der Stücke, welche die Seitenflächen einer geraden regelmäfsigen Pyramide von einer auf der Grundfläche errichteten Senk-

rechten abschneiden, konstant ist. Alle Stücke sind vom Fufspunkt der Senkrechten an zu rechnen.

39. Die Gesamtoberfläche einer geraden regelmäfsigen Pyramide ist dreimal so grofs wie die Grundfläche. Bestimme den Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche.

40. Ein Tetraeder wird von einer Ebene geschnitten, welche zwei gegenüberliegenden Kanten parallel ist; beweise, dafs der Schnitt ein Parallelogramm von konstantem Winkel ist und bestimme, wann dessen Inhalt ein Maximum ist.

41. Eine ebene Fläche A wird auf die Seitenflächen einer rechtwinkligen Ecke projiciert; die Projektionen haben die Inhalte A_1, A_2 und A_3, beweise, dafs

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2.$$

42. Eine Ebene schneidet von den Kanten einer rechtwinkligen Ecke die Stücke a, b und c ab; bestimme den Abstand der Ebene vom Scheitelpunkt der Ecke und die Winkel, welche die Ebene mit den Seitenflächen der Ecke bildet.

43. Welcher konvexe Körper hat seine Ecken auf den Mitten der Kanten eines regelmäfsigen Tetraeders? In welchem Verhältnis stehen die Radien der um diesen Körper und um das Tetraeder beschriebenen Kugeln?

44. Ein sphärisches Dreieck ABC hat die Seiten a, b und c, und die Winkel α, β und γ; beweise, dafs

$$\sin a \sin \beta = \sin \alpha \sin b.$$

45. Um zwei gleich grofse Kugeln wird eine Umdrehungscylinderfläche gelegt, und diese wird von einer Ebene geschnitten, welche beide Kugeln berührt; beweise, dafs die Summe der Abstände der Berührungspunkte

von einem beliebigen Punkte der Schnittkurve konstant ist. Wie grofs ist der Flächeninhalt des Schnitts, wenn die Kugeln den Radius b haben und die Centrale gleich a ist?

46. Eine Halbkugel ist in eine gegebene reguläre n-seitige Pyramide beschrieben; bestimme den Radius derselben.

47. Bestimme die Höhe und die Flächenwinkel eines Parallelepipedons, das von 6 Rhomben mit der Seite a und dem Winkel α begrenzt wird.

48. Eine gegebene reguläre 6-seitige Pyramide wird von einer Ebene geschnitten, welche durch eine der Seiten der Grundfläche geht und das unterste Viertel von der Höhe abschneidet. Bestimme den Inhalt der Schnittfläche.

Drittes Kapitel.

Kongruenz, Symmetrie und Ähnlichkeit.

Kongruenz und Symmetrie.

55. Sind zwei Punktsysteme im Raume kongruent, so werden dieselben sich Punkt für Punkt entsprechen, und der Abstand zwischen zwei Punkten des einen Systems wird gleich dem Abstande zwischen den zwei entsprechenden Punkten des anderen Systems sein. Es soll untersucht werden, ob die Umkehrung des Satzes auch gültig ist.

A, B und C seien drei Punkte des einen Systems, a, b und c die entsprechenden des anderen Systems. Dann läfst das eine System sich so legen, dafs $\triangle\, abc$ das Dreieck ABC des anderen Systems deckt. Nun seien D und d zwei neue einander entsprechende (gepaarte) Punkte der beiden Systeme. Da die drei Punkte A, B und C gleiche Abstände von D und d haben, so mufs entweder d auf D fallen, oder die Ebene ABC mufs senkrecht auf der Mitte von Dd stehen.

Man ersieht hieraus, dafs alle Punkte der Ebene ABC von den ihnen entsprechenden gedeckt werden, aber dafs ein Punkt, der nicht in diese Ebene fällt, entweder den ihm entsprechenden Punkt decken oder auch symmetrisch zu demselben liegen kann mit

Beziehung auf die Ebene ABC. Fällt d auf D, so müſsen die Punktsysteme sich decken, denn wenn zwei andere Punkte e und E symmetrisch liegen würden, so müſsten die zusammenfallenden Punkte d und D in der Ebene ABC liegen, was nach unserer Voraussetzung nicht der Fall ist; es giebt also nur zwei Möglichkeiten: entweder decken sich die beiden Systeme, oder auch es liegen zwei beliebige gepaarte Punkte symmetrisch mit Beziehung auf die Ebene ABC. Umgekehrt müſsen in zwei solchen Systemen alle einander entsprechenden Abstände gleich groſs sein, denn zwei solche Abstände liegen in derselben Ebene (10) und sind daselbst symmetrisch mit Beziehung auf die Durchschnittslinie ihrer Ebene mit der Ebene ABC.

56. Zwei solche Punktsysteme, in denen alle einander entsprechenden Abstände gleich groſs sind, und die sich nicht zur Deckung bringen lassen, heiſsen symmetrisch. Dieselben lassen sich, wie gezeigt wurde, immer in Lagen bringen, die mit Beziehung auf eine Ebene (die Symmetrieebene) symmetrisch sind und das auf unendlich viele Arten, indem man drei beliebige Punkte des einen Systems mit den drei entsprechenden des anderen zur Deckung bringt. Eine Ebene des einen Systems hat also eine entsprechende Ebene im zweiten, und die Schnittfiguren der beiden Ebenen sind kongruent.

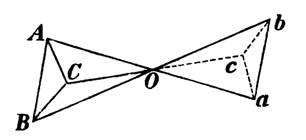
57. Es ist leicht zu beweisen, daſs die gepaarten Linien und Ebenen der beiden Systeme gleiche Winkel mit einander bilden. Nimmt man z. B. zwei Ebenen des einen Systems, deren Neigungswinkel FGH ist, so wird dieser gleich dem Winkel fgh des zweiten Systems sein; dieser Winkel muſs indessen der Neigungswinkel im zweiten System sein, da fg und gh senkrecht auf der

Kante des zweiten Systems stehen müfsen, wenn FG und GH senkrecht auf der Kante des ersten Systems stehen.

58. Um zu entscheiden, ob zwei Systeme, deren gepaarte Abstände gleich grofs sind, kongruent oder symmetrisch seien, nehme man in dem einen Systeme vier Punkte (A, B, C und D), welche nicht in derselben Ebene liegen. Man denke sich das Auge in einem derselben, z. B. in D, und merke sich die Umlaufsrichtung, in der man die drei übrigen Punkte in der Reihenfolge A, B, C auf einander folgen sieht. Darauf betrachte man die drei Punkte a, b, c von d aus in derselben Weise; erhält man in beiden Fällen dieselbe Umlaufsrichtung, so sind die Systeme kongruent; im entgegengesetzten Falle sind sie symmetrisch.

Als Beispiele für symmetrische Systeme lassen sich anführen: Ein Gegenstand und sein Spiegelbild, die beiden Hände, die gegenüberliegenden Ecken eines Parallelepipedons, u. s. w.

59. Es läfst sich auch auf andere Arten ein System konstruieren, welches einem gegebenen symmetrisch ist. Zieht man von jedem Punkte A durch einen gegebenen Punkt O, das Symmetriecentrum, eine Gerade, und trägt auf dieser



$Oa = -OA$ ab, so wird das auf solche Weise bestimmte Punktsystem dem gegebenen symmetrisch sein; man hat nämlich für zwei beliebige Punkte $AB = ab$, und ABC und abc bestimmen, von O aus gesehen, entgegengesetzte Umlaufsrichtungen.

60. Sobald ein Punktsystem selbst aus zwei Teilen besteht, welche symmetrisch mit Beziehung auf eine

Ebene oder einen Punkt liegen, so sind dieses und das ihm symmetrische System kongruent. A und A' mögen nämlich die beiden symmetrischen Teile bezeichnen, während in dem zweiten System a und a' den Teilen A und A' entsprechen. A ist dann kongruent a', A' kongruent a. Bringt man A mit a' zur Deckung, so müssen die zu A und a' symmetrisch liegenden Teile A' und a sich auch decken.

61. **Ähnlichkeit.** Man denke sich ein System aus den Punkten A, B, C ... bestehend und wähle einen beliebigen Punkt O. Auf OA trage man $Oa = m.OA$ ab, auf OB $Ob = m.OB$ u. s. w., wo m eine beliebige Zahl bedeutet. Dann erhält man ein System aus den Punkten a, b, c ..., welches dem gegebenen Punkt für Punkt entspricht; die beiden Systeme heifsen perspektivisch ähnlich mit O als Ähnlichkeitspunkt und den durch O gezogenen Geraden als Ähnlichkeitsstrahlen. Nun folgt wie in der Planimetrie:

Homologe Strecken sind parallel und proportional nach dem Verhältnis m.

Homologe Winkel sind gleich grofs und homologe Ebenen parallel (15).

Die Lage des Ähnlichkeitspunktes ist gleichgültig. Hierdurch beweist man leicht bei passender Wahl des Ähnlichkeitspunktes, dafs einer Geraden, einem Kreise, einer Kugel und einer Ebene des einen Systems eine Gerade, ein Kreis, eine Kugel und eine Ebene des anderen Systems entspricht.

62. Die Punkte a, b, c ... lassen sich auf zwei Arten abtragen, nämlich von O aus nach derselben Seite wie A, B, C ... oder nach der entgegengesetzten.

In den beiden verschiedenen Systemen, welche auf

solche Art gebildet werden, sind die einander entsprechenden Abstände gleich grofs, und die Systeme sind deshalb symmetrisch mit O als Symmetriecentrum. Das erste System, welches dieselbe Umlaufsrichtung wie das gegebene System hat, heifst diesem ähnlich nach dem Verhältnis m; das zweite und das gegebene System, welche entgegengesetzte Umlaufsrichtungen haben, heifsen symmetrisch ähnlich nach dem Verhältnis m.

Sind in zwei Systemen A und B die Abstände proportional nach dem Verhältnis m, und konstruiert man, indem man einen beliebigen Ähnlichkeitspunkt wählt, ein System B_1, so dafs A und B_1 ähnlich nach dem Verhältnis m sind, so werden die einander entsprechenden Abstände in B und B_1 gleich grofs, und B und B_1 müfsen also kongruent oder symmetrisch sein.

Zwei Systeme, welche einander Punkt für Punkt entsprechen, und in denen alle einander entsprechende Abstände proportional sind, sind also ähnlich oder symmetrisch ähnlich, je nachdem ihre Umlaufsrichtungen gleich oder entgegengesetzt sind.

63. Kennt man die Bedingungen für die Kongruenz oder Symmetrie zweier Systeme, so kann man hieraus die Bedingungen für ihre Ähnlichkeit oder symmetrische Ähnlichkeit dadurch ableiten, dafs man «proportionale Strecken» an Stelle von «gleich grofse Strecken» setzt. Der Beweis dieses Satzes wird ebenso wie der analoge Beweis in der Planimetrie oder wie der Beweis in 62 geführt. Da Ecken nur von Winkeln abhängen, so lassen sich Kongruenz und Ähnlichkeit an diesen nicht unterscheiden.

64. Kongruenz und Symmetrie dreiseitiger Ecken. Die Untersuchung dreiseitiger Ecken läſst sich an den entsprechenden sphärischen Dreiecken ausführen, indem man solche aus drei Stücken zu konstruieren sucht. Die Anzahl der Lösungen wird dann zeigen, ob die Gleichheit der drei Stücke in zwei Dreiecken Kongruenz bedingt oder nicht.

Ein sphärisches Dreieck läſst sich aus den drei Seiten auf dieselbe Weise konstruieren wie ein ebenes Dreieck; ist die eine Seite abgetragen, so wird der dritte Eckpunkt durch zwei Kreise bestimmt; diese erhalten, wenn die Aufgabe möglich ist, zwei Durchschnittspunkte; die beiden Lösungen sind symmetrisch.

Zwei dreiseitige Ecken, deren Seiten beziehlich gleich sind, sind also kongruent oder symmetrisch.

Durch Vertauschung der Ecken mit ihren Polarecken (oder der Dreiecke mit den Polardreiecken) schlieſst man hieraus:

Zwei dreiseitige Ecken, deren Winkel beziehlich gleich sind, sind kongruent oder symmetrisch.

65. Ein sphärisches Dreieck läſst sich aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln konstruieren; man sieht leicht, daſs man dadurch zwei symmetrische Lösungen erhält. Also:

Zwei dreiseitige Ecken, in denen eine Seite und zwei anliegende Winkel beziehlich gleich sind, sind kongruent oder symmetrisch, und durch Vertauschung mit den Polarecken:

Zwei dreiseitige Ecken, in denen ein Winkel und die denselben einschlieſsenden Seiten

beziehlich gleich sind, sind kongruent oder symmetrisch.

66. Um ein Dreieck aus A, AC und CB zu konstruieren zeichne man einen Hauptkreis, auf dem AB liegen soll. An einen Punkt A dieses Kreises trage man den Winkel A an und verlängere den abgetragenen Bogen bis zu dem A diametral entgegengesetzten Punkte A_1. C liegt dann auf einem bekannten Punkte des so gezeichneten Halbkreises. B läſst sich nun durch den Abstand CB bestimmen; soll die Konstruktion möglich sein, so darf CB nicht kleiner als die spitze und nicht gröſser als die stumpfe von C gefällte Senkrechte sein; ist dies der Fall, so erhält man zwei Punkte B, welche symmetrisch mit Beziehung auf die Senkrechte liegen; diese lassen sich nur benutzen, sofern sie die Seite AB kleiner als 180° machen. Da die Kongruenz von einer Lösung bedingt wird, so müssen die Fälle, welche zu einer Bedingung für die Kongruenz führen, diejenigen sein, wo von den beiden Punkten B der eine auf den einen, der andere auf den anderen Halbkreis AA_1 fällt. Dies geschieht, da die spitze und die stumpfe Senkrechte beziehungsweise nach derselben Seite fallen wie der spitze und der stumpfe Winkel A, in zwei Fällen, nämlich wenn $AC + CB > 180°$ und $CB < AC$, und wenn $AC + CB < 180°$ und $CB > AC$.

Zwei dreiseitige Ecken sind also kongruent oder symmetrisch, wenn in ihnen ein Winkel, eine anliegende und die gegenüberliegende Seite beziehlich gleich sind: 1. Falls die Summe der gegebenen Seiten kleiner als 180° und die gegenüberliegende Seite gröſser

als die anliegende ist; 2. Falls die Summe der gegebenen Seiten gröfser als 180° und die gegenüberliegende Seite kleiner als die anliegende ist.

Ist $\angle A = 90°$ und $AC = 90°$, so fällt C auf den Pol von AB. CB mufs dann auch 90° sein, wodurch $\angle B = 90°$ wird, während die beiden übrigen Stücke unbestimmt aber gleich grofs sind.

Durch Vertauschung mit der Polarecke schliefst man jetzt:

Zwei dreiseitige Ecken, in denen eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel beziehlich gleich sind, sind kongruent oder symmetrisch: 1. Falls die Summe der gegebenen Winkel gröfser als 180° und der gegenüberliegende Winkel kleiner als der anliegende ist; 2. Falls die Summe der gegebenen Winkel kleiner als 180° und der gegenüberliegende Winkel gröfser als der anliegende ist.

67. Als Beispiel für die Kongruenz zweier Körper läfst sich anführen, dafs zwei Tetraeder kongruent sind, wenn eine Ecke des einen einer Ecke des anderen kongruent ist und die homologen Kanten gleich lang sind; ferner dafs zwei Tetraeder $ABCD$ und $abcd$ kongruent oder symmetrisch sind, wenn in ihnen alle 6 Kanten paarweise gleich grofs sind ($AB = ab$, $AC = ac$, u. s. w.). Sätze über die Ähnlichkeit der Tetraeder lassen sich hieraus auf die oben angegebene Weise ableiten.

Regelmäfsige Körper derselben Art sind ähnlich.

Viertes Kapitel.

Oberflächen.

68. **Die Oberflächen der Polyeder** werden gemessen, indem man die Inhalte der einzelnen Seitenflächen mifst und addiert.

Symmetrische Flächen haben gleichen Inhalt, denn sie lassen sich in ebene Teilen teilen und symmetrische ebene Figuren sind kongruent. Dafs der Satz auch für krumme Flächen gilt, wird durch den gewöhnlichen Grenzübergang bewiesen. Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dafs die Inhalte ähnlicher oder symmetrisch ähnlicher Flächen sich wie die Quadrate von zwei homologen Strecken verhalten.

69. **Der Cylinder.** Betrachtet man einen geraden Cylinder als die Grenze für ein Prisma, so läfst die krumme Oberfläche oder der Mantel desselben sich abwickeln, indem die unendlich kleinen Seitenflächen sich um die Erzeugenden drehen lassen, bis sie in dieselbe Ebene fallen. Die hierdurch hervorgebrachte ebene Figur ist ein Rechteck, dessen Höhe gleich der Höhe des Cylinders, und dessen Grundlinie gleich der gerade gerichteten Peripherie der Grundfläche des Cylinders ist; folglich ist

der Mantel eines geraden Kreiscylinders

$$= 2\pi r h\,, \tag{9}$$

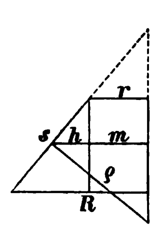
worin h die Höhe des Cylinders und r den Radius der Grundfläche bedeutet.

70. **Der Kegel.** Auf ähnliche Weise betrachtet man den geraden Kreiskegel als Grenze für eine Pyramide. Die Abwickelung des Mantels liefert einen Kreisausschnitt, dessen Bogen gleich der Peripherie der Grundfläche, und dessen Radius die Seitenlinie des Kegels ist; bezeichnet man diese mit s, den Radius der Grundfläche mit r, so wird

der Mantel eines geraden Kreiskegels

$$= \pi r s. \tag{10}$$

71. Der Mantel eines geraden Kegelstumpfs von erster Art ist gleich dem Unterschiede zwischen den Mänteln zweier Kegel; sind die Radien der Grundflächen R und r, die Seitenlinie des Stumpfs s, die Seitenlinie des abgeschnittenen Kegels x, so wird der Mantel des Stumpfs



$$M = \pi R(s+x) - \pi r x\,,$$

aber
$$\frac{x}{r} = \frac{x+s}{R} = \frac{s}{R-r}\,,$$

folglich
$$x = \frac{rs}{R-r}\,; \quad x+s = \frac{Rs}{R-r}\,,$$

woraus
$$M = \pi s(R+r). \tag{11}$$

Für den Stumpf der zweiten Art erhält man auf ähnliche Weise

$$M = \pi s \frac{R^2+r^2}{R+r}. \tag{12}$$

72. Die Formel für den Stumpf der ersten Art läfst sich auch auf die Form

$$M = 2\pi s m \qquad (13)$$

bringen, worin m die Linie bedeutet, welche die Mitten der nichtparallelen Seiten in dem Trapez verbindet, dessen parallele Seiten r und R sind.

Bezeichnet h die Höhe, während ρ die Senkrechte auf der Mitte von s bis zu ihrem Durchschnittspunkt mit der Axe bedeutet, so erhält man, da die Dreiecke, deren Seiten s und h, beziehungsweise ρ und m sind, ähnlich sind,

$$\frac{s}{h} = \frac{\rho}{m} \quad \text{oder} \quad sm = \rho h;$$

dadurch erhält man für den Mantel

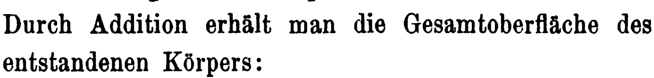
$$M = 2\pi\rho h. \qquad (14)$$

Die gefundenen Formeln gelten auch für $r = 0$, also für den Kegel, und für $R = r$, also für den Cylinder.

73. **Die Kugel.** Dreht sich die Hälfte eines regelmäfsigen $2n$-Ecks um den Durchmesser, so entsteht ein Körper, der aus Kegelstümpfen und zwei ganzen Kegeln zusammengesetzt ist. Die krummen Oberflächen dieser Teile sind (72)

$$2\pi\rho h_1, \; 2\pi\rho h_2, \; \ldots,$$

worin ρ den kleinen Radius des Polygons und h_1, h_2 ... die Höhen der einzelnen Kegel oder Stümpfe bedeuten.



Durch Addition erhält man die Gesamtoberfläche des entstandenen Körpers:

$$O = 4\pi\rho r. \qquad (15)$$

Die Formel ist gültig für jede Seitenzahl des Polygons; wächst diese bis ins Unendliche, so geht der Körper über in eine Kugel, ρ in r; man hat also

$$\text{Oberfläche der Kugel} = 4\pi r^2. \qquad (16)$$

Addiert man nur einen Teil der Stümpfe und geht man dann zur Grenze über, so findet man die Oberfläche einer Zone oder einer Haube mit der Höhe h

$$O = 2\pi r h. \qquad (17)$$

Hieraus ersieht man, dafs aus den Oberflächen einer Kugel und des um dieselbe beschriebenen Cylinders gleiche Stücke zwischen zweiEbenen herausgeschnitten werden, welche den Grundflächen des Cylinders parallel sind.

Man sieht zugleich, dafs man, wenn man einen Kreis mit der Zirkelöffnung l beschreibt, gleiche Flächenstücke umgrenzt, einerlei ob man den Kreis in einer Ebene oder auf einer Kugel beschreibt. Auf der Kugel wird nämlich eine Haube abgeschnitten, deren Höhe durch

$$2rh = l^2$$

bestimmt wird, woraus sich

$$2\pi r h = \pi l^2$$

und damit die Gleichheit der beiden Flächen ergiebt.

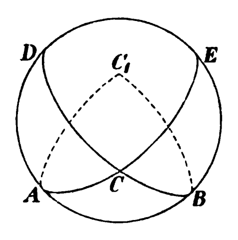
74. **Sphärische Polygone.** Die krumme Oberfläche eines Keilausschnitts oder der Inhalt eines sphärischen Zweiecks ergiebt sich leicht als

$$\frac{a}{360} \cdot 4\pi r^2 \quad \text{oder} \quad \frac{\pi r^2 . a}{90}, \qquad (18)$$

wo a die Gradanzahl vom Winkel des Zweiecks oder vom Winkel zwischen den beiden Ebenen des Keilausschnitts ist.

Ein sphärisches Dreieck läfst sich auf drei Arten zu einem Zweieck ergänzen, indem man je zwei von den Seiten verlängert, bis sie sich wieder schneiden.

Bezeichnet man den Inhalt des Dreiecks mit D, die Gradanzahl seiner Winkel mit α, β und γ, die Inhalte der hinzugefügten Dreiecke mit D_1, D_2 und D_3, so hat man, wenn O die Oberfläche der Kugel bedeutet:



$$D+D_1=\frac{\alpha}{360}.O;\ D+D_2=\frac{\beta}{360}.O;\ D+D_3=\frac{\gamma}{360}.O,$$

woraus

$$3D+D_1+D_2+D_3 = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{360}.O.$$

Die Dreiecke D_1 und D_2 sind in der Figur BCE und ACD. Die Eckpunkte des Dreiecks D_3 sind A, B und der dem Punkte C (mit Beziehung auf den Mittelpunkt der Kugel als Symmetriecentrum) symmetrische Punkt C_1; D_3 ist deshalb dem Dreieck DEC symmetrisch, und da dieses Dreieck in Verbindung mit D, D_1 und D_2 die Halbkugel bildet, so hat man

$$D+D_1+D_2+D_3 = \tfrac{1}{2}O,$$

woraus man erhält

$$D = \frac{\alpha+\beta+\gamma-180}{720}.O = \frac{\varepsilon}{720}.O, \qquad (19)$$

wo ε den sphärischen Exceſs bedeutet.

75. Ein sphärisches Polygon von n Seiten läſst sich durch sphärische Diagonalen in $n-2$ Dreiecke zerlegen, und die Summe der Winkel dieser Dreiecke ist gleich der Summe der Winkel des Polygons. Durch Addition dieser Dreiecke findet man, daſs der letzte Ausdruk (19) für den Inhalt des Dreiecks für jedes Polygon gilt, wenn ε den Unterschied zwischen der

Winkelsumme des Polygons und der Winkelsumme eines ebenen Polygons von derselben Seitenanzahl bedeutet. Umgekehrt erhält man

$$\varepsilon = \frac{720 D}{O},$$

woraus hervorgeht, dafs ε sich der Null nähert, wenn der Radius der Kugel bis ins Unendliche wächst, so dafs dabei das Polygon allmählich eben wird, während der Inhalt konstant bleibt.

Übungsaufgaben.

49. Ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Winkel von 30° dreht sich nach und nach um seine drei Seiten. Bestimme die Verhältnisse zwischen den Oberflächen der drei beschriebenen Körper.

50. In einen Kegel ist eine Kugel beschrieben, deren Oberfläche die Hälfte des Kegelmantels ist; bestimme den Winkel an der Spitze des Kegels.

51. Eine Kugel ist in einen Kegel beschrieben, dessen Scheitelwinkel $2v$ beträgt. Bestimme das Verhältnis der beiden Teile, in welche die Kugeloberfläche durch den Berührungskreis geteilt wird.

52. Um eine Kugel ist ein Cylinder und ein Kegel mit dem Scheitelwinkel 60° beschrieben. Beweise, dafs die Gesamtoberfläche des Cylinders die mittlere Proportionale zwischen den Oberflächen der beiden anderen Körper ist; gilt dieser Satz auch noch für andere Kegel?

53. Ein Kreisabschnitt dreht sich um einen Durchmesser, der den Abschnitt nicht schneidet; wie

läſst sich die Oberfläche des beschriebenen Körpers ausdrücken durch den Radius des Kreises, den Abstand der Sehne vom Mittelpunkt und ihre Projektion auf den Durchmesser?

54. Zwei Punkte auf einer Cylinderfläche werden durch eine Kurve verbunden, welche in der Fläche liegt. Wie muſs diese Kurve die Erzeugenden schneiden, wenn sie der kürzeste Weg auf der Fläche zwischen den beiden Punkten sein soll?

55. Zwei Kugeln mit den Radien R und r und der Centrale c schneiden sich; wie groſs ist die Oberfläche des linsenförmigen Körpers, den sie gemeinsam haben?

56. Zwei Kreise haben die Radien R und r und eine Centrale $c > R + r$. Man zieht zwei gemeinschaftliche Tangenten, eine von jeder Art. Bestimme das Verhältnis der Flächen, welche die Tangenten (zwischen den Berührungspunkten) beschreiben, wenn die Figur um die Centrale gedreht wird.

57. In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen eines regulären Tetraeders und des regulären Oktaeders, dessen Eckpunkte die Mitten der Kanten des Tetraeders sind?

Fünftes Kapitel.

Volumen.

76. **Polyeder.** Als Einheit für den Kubikinhalt oder das Volumen eines Körpers wählt man das Volumen eines Würfels, dessen Kante die Längeneinheit ist. Ist das Meter die Längeneinheit, so heifst die Volumeneinheit ein Kubikmeter (cbm).

1 cbm = 1000 Kubikdecimeter (cdm); 1 cdm = 1000 Kubikcentimeter (ccm); 1 ccm = 1000 cmm.

77. Das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipedons ist gleich dem Produkte von drei zusammenstofsenden Kanten (den drei Dimensionen).

Haben zwei rechtwinklige Parallelepipeda dieselbe Grundfläche, so verhalten sie sich wie die Höhen.

Haben die Höhen nämlich ein gemeinschaftliches Mafs, welches p mal in der einen, q mal in der anderen enthalten ist, so verhalten sie sich wie p zu q. Legt man durch die Teilpunkte der Höhen Ebenen, welche der Grundfläche parallel sind, so teilen diese die beiden Parallelepipeda beziehungsweise in p und q kongruente Parallelepipeda. Die Volumina verhalten sich deshalb auch wie p zu q. Der Satz wird auf die gewöhnliche

Weise für den Fall erweitert, wo die Höhen inkommensurabel sind.

Da man jede der Kanten als Höhe betrachten kann, so ist also bewiesen, dafs rechtwinklige Parallelepipeda, welche in zwei Dimensionen übereinstimmen, sich wie die dritte verhalten.

Nun mögen zwei Parallelepipeda P und p die Dimensionen H, L, B und h, l, b haben. Konstruiert man zwei andere, P_1 mit den Dimensionen H, L, b und p_1 mit den Dimensionen H, l, b, so ist

$$\frac{P}{P_1} = \frac{B}{b}; \quad \frac{P_1}{p_1} = \frac{L}{l}; \quad \frac{p_1}{p} = \frac{H}{h},$$

woraus durch Multiplikation

$$\frac{P}{p} = \frac{H}{h} \cdot \frac{L}{l} \cdot \frac{B}{b}.$$

Läfst man p die Volumeneinheit bedeuten, so hat man

$$\frac{P}{1 \text{ cbm}} = \frac{H}{1 \text{ m}} \cdot \frac{L}{1 \text{ m}} \cdot \frac{B}{1 \text{ m}},$$

woraus hervorgeht, dafs man die Anzahl der Kubikeinheiten des rechtwinkligen Parallelepipedons durch Multiplikation der Zahlen findet, welche die Anzahl der Längeneinheiten der Kanten angeben, oder dafs die Mafszahl des Volumens gleich dem Produkte der Mafszahlen der drei Kanten ist. Erweitert man den in die Geometrie eingeführten Sprachgebrauch in der Weise, dafs man sagt, das Produkt aus Längeneinheit und Flächeneinheit gebe die Volumeneinheit, so kann man also setzen

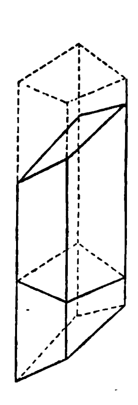
$$P = H.L.B. \tag{20}$$

78. Ein gerades Prisma (Cylinder, deren begrenzende Cylinderflächen beliebig sind, mit einbegriffen) wird durch das Produkt aus Höhe und Grundfläche gemessen.

Das angegebene Mafs ist das Mafs für ein rechtwinkliges Parallelepipedon, welches dieselbe Höhe und eine ebenso grofse Grundfläche wie das Prisma besitzt. Dafs die beiden Grundflächen gleich grofs sind, heifst indessen nichts anderes, als dafs sie sich (jedenfalls wenn man die Teilung bis ins Unendliche fortsetzt) in paarweise kongruente Teile teilen lassen. Da die auf den kongruenten Teilen stehenden Prismen selbst kongruent sind, so werden Prisma und Parallelepipedon aus denselben Teilen zusammengesetzt und deshalb gleich grofs.

79. Ein Prisma (Cylinder) wird durch das Produkt aus der Kante und dem Normalschnitt oder durch das Produkt aus Grundfläche und Höhe gemessen.

Das Prisma wird durch einen Normalschnitt in zwei Teile geteilt, und der untere von diesen wird auf den oberen gesetzt, so dafs die ursprünglichen Endflächen zusammenfallen. Dadurch wird das Prisma in ein gerades Prisma verwandelt, dessen Grundfläche der Normalschnitt und dessen Höhe die Kante ist; es wird also durch das Produkt derselben gemessen.



Der Normalschnitt ist die Projektion der Grundfläche; bezeichnet man also den Inhalt des Normalschnitts mit N, den der Grundfläche mit G, so ist (24)

$$N = G \cos v ,$$

wo v der Winkel zwischen der Grundfläche und der Normalebene ist. Ist K die Kante, h die Höhe, so wird h die Projektion von K, und da diese Linien auch den Winkel v mit einander bilden (18), so ist

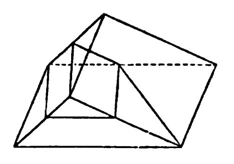
$$K \cos v = h;$$

dann hat man

$$NK = Gh,$$

so dafs das Prisma auch durch das Produkt aus Höhe und Grundfläche gemessen wird.

80. Das Volumen eines Pyramidenstumpfs mit den Grundflächen G und g und der Höhe h liegt zwischen hG und hg, denn man kann ein Prisma mit der Höhe h und der Grundfläche g konstruieren, welches ganz innerhalb des Stumpfs fällt, und ein Prisma mit der Höhe h und der Grundfläche G, welches den Stumpf umschliefst. Zwei Stümpfe, beide mit der Höhe h, und mit Grundflächen, welche beide beziehungsweise gleich G und g sind, müssen also Volumina haben, deren Unterschied höchstens



$$h(G-g)$$

beträgt.

81. Zwei Pyramiden mit gleichen Grundflächen und Höhen sind inhaltsgleich.

Teilt man beide Höhen h in eine beliebige Anzahl (n) gleicher Teile, und legt durch die Teilpunkte Ebenen, welche den Grundflächen parallel sind, so haben die Schnitte in den beiden Pyramiden paarweise denselben Inhalt (39). Diese Inhalte seien, von der Grundfläche angefangen, g, g_1 g_2 ... Die Pyramiden sind durch die Schnitte in Stümpfe geteilt, welche paarweise dieselbe Höhe und gleiche Grundflächen haben. Der Unterschied der Volumina zweier solcher Stümpfe mit den Grundflächen g_a und g_{a+1} beträgt also höchstens $\frac{1}{n} h(g_a - g_{a+1})$, und der Unterschied der beiden Pyra-

miden also höchstens

$$\frac{1}{n}h[(g-g_1)+(g_1-g_2)+(g_2-g_3)+\ldots] = \frac{1}{n}hg.$$

Da nun n eine Zahl ist, welche man so grofs machen kann, wie man will, so läfst sich $\frac{1}{n}hg$ kleiner machen als eine gegebene, noch so kleine Gröfse. Die beiden Pyramiden sind also gleich grofs.

Der Beweis gilt auch für andere Körper als die Pyramide, da derselbe nur voraussetzt,

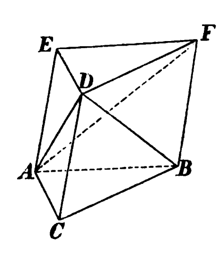
1) Dafs jede Ebene, die einer gegebenen parallel ist, die beiden Körper in Schnitten von gleichem Inhalt schneidet.

2) Dafs jede zwischen zwei parallelen Ebenen enthaltene dünne Scheibe zwischen zwei Prismen liegt, deren Grundflächen die beiden Schnitte sind.

Der Satz gilt also stets für zwei Körper, welche diese Bedingungen erfüllen.

82. Eine dreiseitige Pyramide ist gleich dem dritten Teile eines Prismas von derselben Höhe und Grundfläche.

Aus der Pyramide D-ABC konstruiert man leicht das Prisma $ABCDEF$ mit derselben Grundfläche und Höhe; dadurch ist zu der Pyramide die vierseitige Pyramide D-$AEFB$ hinzugefügt worden, welche durch die Ebene ADF in zwei gleich grofse dreiseitige Pyramiden geteilt wird; von diesen hat die eine A-EDF dieselbe Höhe und Grundfläche wie die gegebene, folglich sind die drei Pyramiden gleich grofs.



Hieraus ergiebt sich, dafs das Volumen einer dreiseitigen

Pyramide ein Drittel des Produktes aus Höhe und Grundfläche ist.

Eine beliebige Pyramide läfst sich in dreiseitige Pyramiden zerlegen, welche sämtlich die Höhe der gegebenen Pyramide haben, und deren Grundflächen zusammengenommen gleich der Grundfläche der gegebenen Pyramide sind; diese wird also ebenso wie die dreiseitige gemessen.

Da der Satz unabhängig von der Seitenzahl ist, so gilt er auch für einen Körper, der von einer beliebigen Kegelfläche und einer Ebene begrenzt ist.

Das Volumen einer Pyramide (eines Kegels) beträgt also ein Drittel des Produktes aus Grundfläche und Höhe.

Ist die Grundfläche des Kegels ein Kreis mit dem Radius r, so wird das Volumen

$$V = \frac{\pi}{3} h r^2 , \tag{21}$$

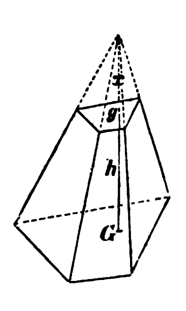
wo h die Höhe ist.

83. Symmetrische Körper besitzen gleiches Volumen, denn sie lassen sich in Pyramiden zerlegen, welche paarweise symmetrisch sind, und da symmetrische Pyramiden gleiche Grundflächen und Höhen haben, so sind sie gleich grofs.

Da die Grundflächen ähnlicher oder symmetrisch ähnlicher Pyramiden sich wie die Quadrate von zwei homologen Linien verhalten, so verhalten sich die Volumina der Pyramiden wie die Kuben von zwei homologen Linien; ähnliche oder symmetrisch ähnliche Körper lassen sich durch zweckmäfsig gewählte homologe Ebenen in paarweise ähnliche oder symmetrisch ähnliche Pyramiden zerlegen. Das Verhältnis der

Volumina ähnlicher oder symmetrisch ähnlicher Körper ist also gleich der dritten Potenz des linearen Verhältnisses der Körper.

84. Der Pyramidenstumpf. Die Grundflächen eines Stumpfs der ersten Art seien G und g, die Höhe h, die Höhe der abgeschnittenen Pyramide x. Das Volumen des Stumpfs ist gleich dem Unterschiede der Volumina der beiden Pyramiden, also



$$V = \tfrac{1}{3}(h+x)G - \tfrac{1}{3}xg.;$$

da g und G perspektivisch ähnlich mit Beziehung auf die Spitze als Ähnlichkeitspunkt sind, so ist indessen

$$\frac{x+h}{\sqrt{G}} = \frac{x}{\sqrt{g}} = \frac{h}{\sqrt{G}-\sqrt{g}},$$

woraus

$$x+h = \frac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}; \quad x = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}};$$

hieraus folgt wiederum

$$V = \frac{h}{3}\,\frac{G\sqrt{G}-g\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$$

oder

$$V = \tfrac{1}{3}h(G+\sqrt{Gg}+g). \qquad (22)$$

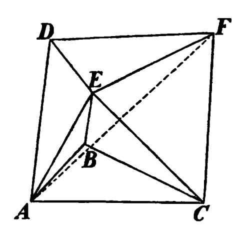
Für den Stumpf der zweiten Art findet man auf ähnliche Weise einen Ausdruch, der sich von dem oben gefundenen nur dadurch unterscheidet, dafs das Glied $\sqrt{Gg}$ negatives Vorzeichen hat.

Geht der Pyramidenstumpf in einen Kegelstumpf über, dessen Grundflächen Kreise mit den Radien R

und r sind, so erhält man für die beiden Arten von Stümpfen

$$V = \frac{\pi}{3} h(R^2 \pm Rr + r^2). \tag{23}$$

85. **Ein schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma ist gleich der Summe dreier Pyramiden, welche die eine Grundfläche des Prismas zur gemeinschaftlichen Grundfläche haben, während ihre Spitzen in den Eckpunkten der anderen Grundfläche liegen.**

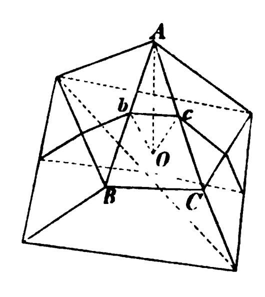


Der Schnitt AEC schneidet die eine Pyramide $E\text{-}ABC$ ab. Es bleibt die vierseitige Pyramide $E\text{-}ACFD$ übrig, welche durch den Schnitt AEF in die beiden dreiseitigen $E\text{-}ADF$ und $E\text{-}ACF$ zerlegt wird. Die Spitze der letzteren läfst sich von E nach B verlegen, ohne dafs das Volumen verändert wird, da EB der Grundfläche parallel ist; betrachtet man nun F als Spitze, ABC als Grundfläche, so hat man die zweite Pyramide. Nun ist $E\text{-}ADF = E\text{-}ADC = D\text{-}ABC$, indem man zuerst F nach C und darauf E nach B verlegt.

In diesem Satze ist der Satz 82 einbegriffen.

86. **Das Prismatoid.** Ein Prismatoid möge die Grundflächen G und g, die Höhe h haben. S sei der Flächeninhalt eines Schnittes, der parallel den Grundflächen durch die Mitte einer Kante und deshalb (17) durch die Mitten aller Seitenkanten gelegt ist. Man zerlegt das Prismatoid in Pyramiden mit einer gemeinschaftlichen Spitze O in einem beliebigen Punkte der

Schnittfläche, deren Grundflächen die Grundflächen und Seitenflächen des Prismatoids sind. Von diesen Pyramiden haben diejenigen, deren Grundflächen mit denen des Prismatoids zusammenfallen, die Volumina $\frac{1}{6}hG$ und $\frac{1}{6}hg$. Nun sei eine der Seitenflächen ABC und die Schnittebene schneide diese in bc, welche der BC parallel ist und halb so grofs ist wie BC. Dann hat man



$$O\text{-}ABC = 4\,.\,O\text{-}Abc = 4\,.\,A\text{-}Obc = \tfrac{2}{3}h\,.\,Obc.$$

Das Dreieck Obc und die ihm analogen machen zusammen das ganze Polygon S aus. Die Summe der Pyramiden, deren Grundflächen mit den Seitenflächen des Prismatoids zusammenfallen, ist deshalb gleich $\frac{2}{3}hS$, und das Volumen des ganzen Prismatoids ist

$$V = \tfrac{1}{6}h(G+g+4S). \qquad (24)$$

In dieser Formel sind mehrere der vorhergehenden einbegriffen.

87. Das Volumen eines Polyeders, in das sich eine Kugel beschreiben läfst, ist gleich dem dritten Teile des Produktes aus dem Radius der Kugel und der Oberfläche des Polyeders.

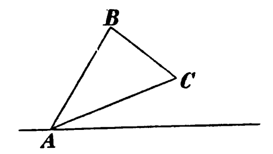
Das Polyeder läfst sich nämlich in Pyramiden zerlegen, deren gemeinschaftliche Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist und deren Grundflächen die Seitenflächen des Polyeders sind.

Körper, welche um dieselbe Kugel beschrieben sind, haben Volumina, die sich wie die Oberflächen verhalten.

88. **Dreht sich ein Dreieck um eine durch eine seiner Ecken gehende Gerade** (welche die gegenüberliegende Seite nicht schneidet), **so beschreibt dasselbe einen Körper, dessen Volumen**

$$V = \tfrac{1}{3} h . O \qquad (25)$$

ist, worin h die zur gegenüberliegenden Seite gehörige Höhe und O die krumme Oberfläche bedeutet, welche die gegenüberliegende Seite beschreibt.



Der Körper läſst sich nämlich in unendlich kleine Pyramiden zerlegen, deren gemeinschaftliche Spitze A ist, während die Grundfläche jeder derselben von zwei aufeinander folgenden Lagen von BC gebildet wird. Diese Pyramiden haben sämtlich die (von A gefällte) Höhe des Dreiecks zur Höhe, und die Summe ihrer Grundflächen ist die krumme Oberfläche eines Kegelstumpfs, der von BC beschrieben wird.

89. **Die Kugel.** In 87 wurde das Volumen eines Polyeders, in das sich eine Kugel beschreiben läſst, durch den Radius dieser Kugel und die Oberfläche des Polyeders ausgedrückt; läſst man die Anzahl der Seitenflächen des umbeschriebenen Polyeders bis ins Unendliche wachsen, so geht das Polyeder in die Kugel über, und seine Oberfläche wird also $4\pi r^2$; folglich ist

$$\text{das Volumen der Kugel} = \tfrac{4}{3}\pi r^3. \qquad (26)$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich, daſs jedes Volumen, welches von einem Teil der Kugelfläche und einer beliebigen Kegelfläche mit der Spitze im Mittelpunkt der Kugel begrenzt wird, gleich einem Drittel des Produktes

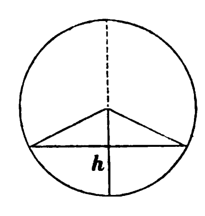
aus dem Radius der Kugel und dem Teil ihrer Oberfläche ist, welcher das gesuchte Volumen begrenzt.

90. Ein Kugelsektor (hervorgebracht durch Umdrehung eines Kreissektors um den einen der begrenzenden Radien) hat also ein Volumen

$$S = \tfrac{1}{3}r \,.\, 2\pi rh = \tfrac{2}{3}\pi r^2 h, \qquad (27)$$

worin r der Radius der Kugel und h die Höhe der Haube ist. Dieselbe Formel gilt übrigens auch für das Volumen, welches von einem Sektor beschrieben wird, wenn derselbe sich um einen Radius dreht, welcher nicht im Sektor liegt; h bezeichnet dann die Höhe der Zone, welche vom Bogen des Sektors beschrieben wird.

91. Ein Kugelsegment ist gleich dem Unterschied zwischen einem Sektor und einem Kegel. Ist die Höhe der Haube h, so wird die Höhe des Kegels $r-h$, also das Volumen des Segments



$$S_1 = \tfrac{2}{3}\pi r^2 h - \tfrac{1}{3}\pi (r-h)\rho^2,$$

wo ρ der Radius der Grundfläche des Kegels ist; nun ist indessen

$$\rho^2 = h(2r-h),$$

folglich

$$S_1 = \frac{\pi}{3}h[2r^2-(r-h)(2r-h)] = \frac{\pi}{3}h(3rh-h^2)$$

oder

$$S_1 = \pi h^2(r-\tfrac{1}{3}h). \qquad (28)$$

Die Formeln für Sektor und Segment gelten auch wenn diese gröſser als die Halbkugel sind. Hinsichtlich des Segments zeigt sich nur ein Unterschied in sofern, als die Höhe des Kegels $h-r$ wird, aber da der Kegel in diesem Falle zum Sektor addirt wird, so wird das endliche Resultat nicht verändert.

92 Dreht sich ein Segment mit der Sehne s um einen Durchmesser, der das Segment nicht schneidet, so wird ein Volumen beschrieben, welches gleich dem Unterschiede der Volumina ist, welche vom Sektor, beziehungsweise vom Dreieck beschrieben werden. Das erstere beträgt $\frac{2}{3}\pi r^2 h$, wo h die Projektion von s auf den Durchmesser ist, das letztere $\frac{2}{3}\pi \rho^2 h$ (88), wo ρ den Abstand der Sehne vom Mittelpunkt bedeutet. Da nun $r^2 - \rho^2 = \frac{1}{4}s^2$, so wird das vom Segment beschriebene Volumen

$$V = \tfrac{1}{6}\pi h s^2. \tag{29}$$

93. Eine körperliche Zone wird von einer Zone und zwei parallelen Ebenen begrenzt. Dieselbe läfst sich in einen Kegelstumpf und den in 92 gemessenen Körper zerlegen. Ist h die Höhe der Zone und sind a und b die Radien der Grundflächen, so wird das Volumen

$$V = \tfrac{1}{6}\pi h s^2 + \tfrac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2),$$

und da

$$s^2 = (b-a)^2 + h^2,$$

so wird

$$V = \tfrac{1}{6}\pi h^3 + \tfrac{1}{2}\pi h(a^2 + b^2). \tag{30}$$

Einen anderen Ausdruck erhält man, wenn man den Radius m des Kreises einführt, der entsteht, wenn man einen Schnitt durch die Zone mitten zwischen den beiden Grundflächen legt. Die Zone wird dadurch in zwei andere zerlegt, deren Summe

$$V = \tfrac{1}{24}\pi h^3 + \tfrac{1}{4}\pi h(a^2 + 2m^2 + b^2)$$

ist; multipliciert man mit 2 und subtrahiert die Gleichung (30), so erhält man

$$V = \pi h m^2 - \tfrac{1}{12}\pi h^3. \tag{31}$$

94. Ein Keilausschnitt von g° hat das Volumen

$$V = \frac{g}{360}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{g}{270}\cdot\pi r^3. \tag{32}$$

Übungsaufgaben.

58. Bestimme das Volumen einer regelmäfsigen 6-seitigen Pyramide, deren Grundfläche die Seite a hat, während die Seitenkanten b sind.

59. Zwei Kugeln mit demselben Radius r gehen gegenseitig durch ihre Mittelpunkte; bestimme das Volumen des linsenförmigen Körpers, den sie gemeinsam haben.

60. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b dreht sich nach einander um seine drei Seiten; bestimme das Verhältnis der Volumina der entstandenen Körper.

61. Ein Dreieck ist durch eine Linie geteilt, welche die Mitten zweier Seiten verbindet; dasselbe dreht sich um seine dritte Seite; bestimme das Verhältnis der Volumina der beiden Körper, welche von den beiden Teilen des Dreiecks beschrieben werden.

62. Die beiden Teile eines Kugelsektors (Kegel und Segment) sind gleich grofs; bestimme den Scheitelwinkel des Kegels.

63. Um eine Kugel ist eine Umdrehungskegelfläche beschrieben. Der Raum zwischen dem Kegel und der Kugel ist ebenso grofs wie der Kugelsektor, welcher durch den Berührungskreis bestimmt wird. Berechne den Scheitelwinkel des Kegels.

64. Wie grofs ist das Volumen eines regulären Tetraeders mit der Kante a?

65. Wie kann man auf geometrischem Wege zu einer Formel für $(a+b)^3$ gelangen?

66. Wie bestimmt man eine Ebene, welche durch eine gegebene Gerade geht und ein gegebenes Parallelepipedon halbiert?

67. Durch welche Gleichung werden die Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedons bestimmt, wenn man das Volumen, die Oberfläche und die Summe der Kanten kennt?

68. Beweise, dafs die Summe der Abstände eines Punktes innerhalb eines regulären Tetraeders von den vier Seitenflächen konstant ist.

69. Beweise dafs zwei Tetraeder, welche eine Ecke gemeinsam haben, sich wie die Produkte der in der Ecke zusammenstofsenden Kanten verhalten.

70. Ein Tetraeder wird von einer durch die eine Kante gelegten Ebene halbiert; wie teilt diese Ebene die gegenüberliegende Kante?

71. In welchem Verhältnis wird ein Tetraeder durch eine Ebene geteilt, welche durch die Mitten von zwei gegenüberliegenden Kanten geht?

72. Eine Pyramide wird durch einen der Grundfläche parallelen Schnitt stetig geteilt; nach welchem Verhältnis teilt der Schnitt die Höhe?

73. Ein Tetraeder hat seine Eckpunkte in den Schwerpunkten der Seitenflächen eines anderen Tetraeders; beweise, dafs die beiden Tetraeder ähnlich liegen und symmetrisch ähnlich sind, und gebe die Verhältnisse ihrer Kanten, Oberflächen und Volumina an.

74. Ein schiefabgeschnittenes dreiseitiges Prisma hat eine gegebene Grundfläche, Seitenkanten von gegebener Richtung und ein konstantes Volumen; beweise, dafs die andere Grundfläche durch einen festen Punkt geht.

75. In welchem Verhältnis stehen die beiden Volumina, welche ein Parallelogramm bei der Drehung um zwei zusammenstofsende Seiten beschreibt?

76. Bestimme das Volumen eines Ikosaeders mit der Kante a.

77. Ein gegebener Kegelstumpf vom spec. Gewichte $\frac{1}{2}$ schwimmt in reinem Wasser mit vertikaler Axe; wie tief sinkt derselbe ein?

78. Zwei parallele Schnitte einer Kugel haben die Radien a und b und den Abstand h; berechne den Radius der Kugel und das Volumen der körperlichen Zone.

79. Um eine Kugel sind ein Kegel und ein Cylinder beschrieben; das Volumen des letzteren ist die mittlere Proportionale zwischen den Volumina der beiden ersten; bestimme den Scheitelwinkel des Kegels.

80. In eine Kugel wird ein Kegel beschrieben, dessen krumme Oberfläche gleich der der abgeschnittenen Haube ist. Bestimme das Verhältnis der Volumina des Kegels und der Kugel.

81. Wie grofs ist die Haube, welche eine gegebene Kugel von einer beliebigen durch ihren Mittelpunkt gehenden Kugel abschneidet?

82. Beweise, dafs ein Dreieck, welches sich um eine äufsere Axe dreht, ein Volumen beschreibt, welches gleich dem Produkte aus der Dreiecksfläche und dem Kreisumfange ist, welchen der Schwerpunkt des Dreiecks beschreibt.

83. In einen gegebenen Kegel ist ein Cylinder von gegebenem Volumen beschrieben; welche Gleichung bestimmt die Höhe des Cylinders?

84. Eine Kegelfläche ist um zwei Kugeln beschrieben, welche sich von aufsen berühren und die Radien R und r haben. Bestimme das Volumen, welches

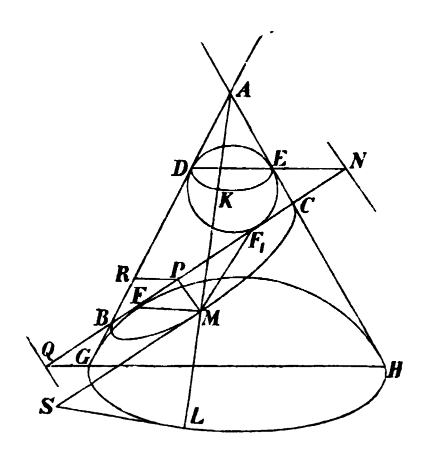
von den Kugeln und der Kegelfläche begrenzt wird.

85. Eine regelmäſsige sechsseitige Pyramide wird von einer Ebene geschnitten, welche durch die eine Seite der Grundfläche geht und das unterste Viertel von der Höhe der Pyramide abschneidet; bestimme das Verhältnis zwischen der abgeschnittenen und der ganzen Pyramide.

Sechstes Kapitel.

Über die Kegelschnitte.

95. **Die Kegelschnitte.** Eine Umdrehungskegelfläche möge von einer Ebene geschnitten werden. Die Figur stellt einen Schnitt durch die Axe des Kegels dar, der



senkrecht auf der schneidenden Ebene steht. In den Kegel werden zwei Kugeln beschrieben, welche die Kegelflächen in Kreisen mit den Durchmessern DE und GH berühren und die schneidende Ebene in den Punkten F und F_1.

M sei ein Punkt der Durchschnittskurve, AM die durch diesen Punkt gelegte Erzeugende. MF und ML sind Tangenten von M an dieselbe Kugel; gleichfalls MF_1 und MK. Dann hat man

$$MF = ML; \quad MF_1 = MK,$$

mithin

$$MF + MF_1 = KL = DG.$$

Die Durchschnittskurve hat also die Eigenschaft, dafs jeder ihrer Punkte Abstände von F und F_1 mit konstanter Summe hat; eine Kurve von dieser Eigenschaft heifst eine Ellipse; F und F_1 heifsen die Brennpunkte, MF und MF_1 die Brennstrahlen von M. Zufolge eines bekannten Satzes hat man, wenn a, b und c die Seiten des Dreiecks ABC sind (Plan. 64),

$$DG = BC = a; \quad FF_1 = c - b.$$

B und C heifsen die Scheitelpunkte, a heifst die grofse Axe der Ellipse, und das Verhältnis

$$e = \frac{FF_1}{BC} = \frac{c-b}{a}$$

heifst die Excentricität.

96. Die Ebene der Ellipse schneidet die Ebene der Berührungskreise in zwei auf der Ebene GAH in N und Q senkrechten Geraden, den Leitlinien der Ellipse. Die Abstände des Punktes M von einer von diesen und von dem nächsten Brennpunkt stehen in einem konstanten Verhältnis. Der Abstand des Punktes M von der durch N gehenden Leitlinie ist nämlich gleich PN, wenn $MP \perp BC$. Der Brennstrahl ist gleich MK, und dieser wiederum gleich RD, wenn $PR \parallel DE$. Das gesuchte Verhältnis ist also

$$\frac{RD}{PN} = \frac{AB - AC}{BC} = e.$$

Auf dieselbe Weise wird der Satz hinsichtlich der anderen Leitlinie bewiesen.

97. Es wurde vorausgesetzt, dafs die Ebene nur das eine Netz des Kegels schneide; schneidet sie beide, so fällt in jedes Netz eine von den Kugeln, und M fällt auf die Verlängerung von KA. In diesem Falle wird also die Differenz der Brennstrahlen konstant. Die Kurve, welche aus zwei getrennten Ästen besteht, heifst Hyperbel. Man erhält hier

$$e = \frac{c + b}{a},$$

so dafs die Excentricität der Hyperbel immer gröfser als 1 ist, während die der Ellipse kleiner als 1 ist. Die Leitlinien werden ebenso wie bei der Ellipse bestimmt. und haben die dort bewiesene Eigenschaft.

Als Grenzfall ergiebt sich in beiden Fällen derjenige, wo die schneidende Ebene einer Erzeugenden parallel ist. F und B rücken bis ins Unendliche fort, aber da man beständig $FB = CF_1$ hat, so werden FF_1 und BC einander mehr und mehr gleich, so dafs man $e = 1$ hat. Die Kurve heifst in diesem Falle eine Parabel. Dieselbe läfst sich als eine Ellipse oder als eine Hyperbel auffafsen, deren einer Brennpunkt und Scheitelpunkt in unendlicher Ferne liegen.

Ist $b = c$, so wird $e = 0$; der Schnitt ist ein Kreis. Geht der Schnitt durch den Scheitel des Kegels, so geht die Schnittkurve in zwei gerade Linien über, welche zusammenfallen oder verschwinden können, indem der Schnitt auf einen Punkt reduciert wird.

98. Es wurde bewiesen, dafs jede ebene Kurve auf einer Umdrehungskegelfläche die Eigenschaft hat, dafs die Summe oder Differenz der Brennstrahlen kon-

stant ist. Umgekehrt läfst sich zeigen, dafs sich eine solche Kurve auf eine Umdrehungskegelfläche legen läfst. Sind nämlich F und F_1 die Brennpunkte der gegebenen Kurve und sind B und C durch die gegebene konstante Summe oder Differenz bestimmt, so lege man durch BC eine Ebene senkrecht zur Ebene der Kurve. Wählt man nun in dieser einen Punkt A derartig, dafs $c \mp b = FF_1$, und nimmt man diesen zur Spitze eines Umdrehungskegels mit dem Scheitelwinkel BAC, so wird dieser die gegebene Kurve enthalten. Der geometrische Ort für A ist also ein zweiter Kegelschnitt, dessen Scheitelpunkte in F und F_1, und dessen Brennpunkte in B und C liegen.

99. Die Tangente in M ist die Linie MS, in welcher die Ebene des Kegelschnitts von einer den Kegel in der Erzeugenden AM berührenden Ebene geschnitten wird, denn MS hat zwei unendlich nahe bei einander liegende Punkte mit dem Kegel und deshalb auch mit dem Kegelschnitt gemeinsam. Aus demselben Grunde ergiebt sich, dafs LS Tangente des Kreises GH ist. Da S in der Ebene des Kegelschnitts liegt, ist SF Tangente der Kugel; SL ist Tangente derselben Kugel, folglich ist $SF = SL$, und da $MF = ML$, so ist $\triangle MFS \cong \triangle MLS$; die Tangente in M bildet also mit dem Brennstrahl denselben Winkel wie mit der Erzeugenden; dasselbe ergiebt sich auf ähnliche Weise für den anderen Brennstrahl. Die Tangente halbiert also den Winkel zwischen den Brennstrahlen. Man sieht leicht, dafs bei der Hyperbel der Winkel selbst halbiert wird, während bei der Ellipse der Winkel halbiert wird, den der eine Brennstrahl mit der Verlängerung des anderen bildet. Hieraus folgt,

dafs wenn man $FT = a$ auf der FM abträgt, T und F_1 symmetrisch mit Beziehung auf die Tangente liegen. Hieraus leitet man leicht die Konstruktion einer Tangente von einem gegebenen Punkte an einen Kegelschnitt ab, von dem man die Brennpunkte und die Endpunkte der grofsen Axe kennt. Am zweckmäfsigsten bestimmt man zuerst den Punkt T, der auf einem Kreise um F mit dem Radius a und auf einem Kreise um den gegebenen Punkt, der durch F_1 geht, liegt.

100. **Centralprojektion.** Zieht man von einem gegebenen Punkte A (dem Augenpunkte) Linien (Sehstrahlen) an alle Punkte einer gegebenen Figur und durchschneidet diese Linien mittels einer Ebene, so bestimmen die Linien durch ihre Durchschnittspunkte mit der Ebene eine neue Figur, welche der gegebenen Punkt für Punkt entspricht und die Centralprojektion derselben auf die Ebene (perspektivische Abbildung) heifst. Es soll hier vorausgesetzt werden, dafs auch die gegebene Figur eben sei; dann ist diese umgekehrt auch eine Centralprojektion der zweiten Figur.

Die beiden Figuren sind so mit einander verbunden, dafs einer Geraden L in der einen eine Gerade L_1 in der anderen entspricht, welche durch eine durch L und A gelegte Ebene bestimmt wird. Zwei unendlich nahe bei einander liegenden Punkten entsprechen zwei unendlich nahe bei einander liegende Punkte; eine Tangente an eine Kurve der einen Figur entspricht deshalb einer Tangente an die Centralprojektion der Kurve.

Solche Eigenschaften einer Figur, welche sich auch in der Projektion finden, heifsen projektivisch. Dafs mehrere Punkte auf derselben Geraden liegen, dafs

mehrere Geraden durch denselben Punkt gehen, dafs Kurven sich gegenseitig berühren u. s. w. sind also projektivische Eigenschaften. Diese Eigenschaften sind reine Eigenschaften der Lage (deskriptive Eigenschaften); dagegen werden in der Regel Eigenschaften, welche Mafsverhältnisse betreffen, nicht projektivisch sein.

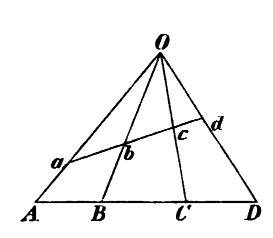
Man benutzt das Gesagte um Sätze über gewisse Figuren aus anderen bekannten Sätzen über Figuren abzuleiten, welche Centralprojektionen der ersten sind. Legt man z. B. eine Ebene durch einen Umdrehungskegel, so erhält man einen Kegelschnitt als Centralprojektion eines Kreises. Alle Kegelschnitte haben deshalb dieselben Eigenschaften der Lage wie der Kreis. Von diesem läfst sich z. B. beweisen, dafs der Pol (Durchschnittspunkt zweier Tangenten) eine Gerade durchläuft, wenn die Polare (Verbindungsgerade der beiden Berührungspunkte) sich um einen festen Punkt dreht. Da dieser Satz nur Lagenverhältnisse ausdrückt, so mufs er für alle Kegelschnitte gelten. Ebenso kann man leicht vom Kreise beweisen (Plan. Aufg. 134), dafs die Linien, welche die Eckpunkte eines umbeschriebenen Dreiecks mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, sich in demselben Punkte schneiden. Dieser Satz drückt nur Eigenschaften der Lage aus und gilt deshalb für jeden Kegelschnitt.

101. Unter den projektivischen Eigenschaften der Figuren giebt es aufser den deskriptiven eine, welche von sehr grofser Bedeutung ist, da dieselbe uns in den Stand setzt Sätze von anderer Art als die oben genannten durch Centralprojektion zu übertragen. Es seien a, b, c und d vier beliebige Punkte einer Geraden und

$$\lambda = \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd};$$

λ heifst dann das Doppelverhältnis (anharmonische Verhältnis) der vier Punkte. Dieses Verhältnis wird durch Centralprojektion nicht verändert; ist nämlich O der Augenpunkt und werden die vier Punkte in A, B, C und D projiciert, so hat man, wenn h und H die Abstände der beiden Geraden von O bedeuten,

$$\frac{h}{H} \cdot \frac{ab}{AB} = \frac{\triangle\, aOb}{\triangle\, AOB} = \frac{aO.Ob}{AO.OB}.$$



Entwickelt man den Wert für ab aus dieser Gleichung und setzt denselben nebst den analogen Ausdrücken für ad, cb und cd in das Doppelverhältnis ein, so geht dieses in das Doppelverhältnis für A, B, C und D über.

Ist das Doppelverhältnis -1, so liegen die vier Punkte harmonisch.

Sobald sich also ein Satz durch Doppelverhältnisse und deskriptive Bestimmungen ausdrücken läfst, mufs derselbe, wenn er für eine gewisse Figur gilt, auch für jede Centralprojektion derselben gelten. So braucht man z. B. nur folgenden Satz für den Kreis zu beweisen um zu wissen, dafs er für alle Kegelschnitte gilt:

Die Durchschnittspunkte einer Geraden mit einem Kegelschnitt sind harmonisch verbunden mit einem Punkte auf der Geraden und dem Durchschnittspunkt dieser mit der Polare des Punktes.

Gelöste Aufgaben.

86. Beweise, dafs man durch die Spitze eines schiefen Kreiskegels drei Linien ziehen kann, von welchen jede den Winkel zwischen den beiden Erzeugenden halbiert, in welchen der Kegel von einer beliebigen durch die Linie gelegten Ebene geschnitten wird.

Der Kegel habe die Spitze O und zur Grundfläche den Kreis S. Um den Kegel beschreibe man eine Kugel. A sei einer der Pole von S; die Linie OA hat dann die angegebene Eigenschaft. Eine beliebige Ebene durch OA schneidet nämlich die Kugel in einem Kreise, dessen Tangente in A die Durchschnittslinie der Ebene mit der in A an die Kugel gelegten Berührungsebene ist. Die Tangente des Kreises ist deshalb derjenigen Sehne des Kreises parallel, welche in der Grundfläche des Kegels liegt, und die beiden zu untersuchenden Winkel sind also Peripheriewinkel auf gleichen Bogen.

Die zweite Linie geht durch den zweiten Pol des Kreises, die dritte steht senkrecht auf den beiden ersten.

87. Zwei Kegelflächen mit den Spitzen O und O_1 haben beide einen Kegelschnitt durch A zur Leitlinie und berühren sich in der Erzeugenden OO_1A. Durch eine Linie L in der Ebene des Kegelschnitts wird eine Ebene gelegt, welche OA in B schneidet. Durch OA wird eine beliebige Ebene gelegt, welche L in T und die Durchschnittskurven der ersten Ebene mit den beiden Kegelflächen in X und Y (aufser in B) schneidet. Beweise, dafs das Doppel-

verhältnis für die vier Punkte T, B, X und Y konstant ist.

Die beliebige Ebene durch OA möge den gegebenen Kegelschnitt in A und C schneiden. Verbindet man C mit O, O_1 und B, so sieht man, dafs das gesuchte Doppelverhältnis gleich dem Doppelverhältnis für die festen Punkte A, B, O und O_1 ist.

88. Beweise, dafs zwei Kegelflächen, welche denselben Kegelschnitt zur Leitkurve haben, sich aufserdem in einer anderen ebenen Kurve schneiden.

S sei der gegebene Kegelschnitt, O und O_1 die beiden Spitzen, P ein Punkt der Durchschnittskurve, welche untersucht werden soll. OP und O_1P mögen S beziehungsweise in A nnd A_1 schneiden. Die Ebene OO_1PAA_1 schneidet die Ebene von S in einer Geraden, die den festen Punkt Q, in dem OO_1 die Ebene von S schneidet, enthält. A, A_1 und Q liegen deshalb auf einer Geraden; diese ist Polare des Punktes R, in welchem die Tangenten in A und A_1 sich schneiden; der geometrische Ort für R ist also eine Gerade, da seine Polare durch einen festen Punkt geht.

Die Linie RP ist Tangente der unbekannten Durchschnittskurve in P, denn diese Tangente mufs in den Berührungsebenen OAR und OA_1R der beiden Kegel liegen. Es ist also bewiesen, dafs alle Tangenten der gesuchten Kurve die Ebene des gegebenen Kegelschnitts auf derselben Geraden schneiden; fafst man aber die Kurve als ein Polygon mit unendlich vielen Seiten auf, so bringt

das, wie leicht ersichtlich, mit sich, dafs die Kurve eben ist.

89. Ein fester Kegelschnitt S enthält einen festen Punkt P. Durch S wird eine Umdrehungskegelfläche mit der Spitze in O gelegt. Durch eine gegebene Gerade L in der Ebene von S wird eine Ebene so gelegt, dafs der Kegelschnitt, in dem sie die Umdrehungskegelfläche schneidet, einen Scheitelpunkt X auf der Erzeugenden OP hat. Welche Kurve durchläuft X, wenn O seinen geometrischen Ort durchläuft?

Der geometrische Ort für O ist ein Kegelschnitt S_1. Die beiden Kegelschnitte sind so mit einander verbunden, dafs jeder von ihnen seine Scheitelpunkte in den Brennpunkten des anderen hat (98). S ist deshalb auch geometrischer Ort für die Spitzen von Umdrehungskegelflächen durch S_1. Diejenige von diesen, welche ihre Spitze in P hat, hat zur Axe die Tangente von S in P, denn diese Linie halbiert den Winkel zwischen den beiden durch die Brennpunkte von S gehenden Erzeugenden.

Man hat also einen geometrischen Ort für X, nämlich die Umdrehungskegelfläche mit der Spitze P und der Leitkurve S_1. Die Axe dieser Kegelfläche, die Tangente in P, möge L in R schneiden. RX berührt dann den Kegelschnitt in der durch L und X gelegten Ebene im Punkte X. Da X ein Scheitelpunkt dieses Kegelschnitts ist, so steht RX senkrecht auf OX. Folglich ist Winkel RXP ein Rechter, und der geometrische Ort für X ist deshalb auch eine Kugel mit dem Durchmesser PR.

Der gesuchte geometrische Ort ist deshalb die Durchschnittskurve der Umdrehungskegelfläche mit der Axe *PR* und der Kugel mit dem Durchmesser *PR*. Der Ort ist also ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf *PR* liegt, und dessen Ebene senkrecht auf *PR* steht.

1/8 85 M 1,60.

Verlag von **Andr. Fred. Höst & Sohn** in Kopenhagen.

Unsere Naturerkenntnis,

Beiträge zu einer

Theorie der Mathematik und Physik

von

Dr. phil. **K. Kroman,**

Professor d. Philosophie a. d. Universität in Kopenhagen.

Von der königl. dän. Akademie der Wissenschaften mit der goldenen Medaille gekrönte Preisschrift.

Ins Deutsche übersetzt unter Mitwirkning des Verfassers

von

Dr. phil. **R. v. Fischer Benzon.**

Preis 10 Mark.

Theorie

der algebraischen Gleichungen

von

Dr. **Jul. Petersen,**

Docent an der polytechnischen Schule in Kopenhagen,
Mitglied der königl. dän. Akademie der Wissenschaften.

Deutsche Ausgabe,

unter Mitwirkung des Verfassers besorgt

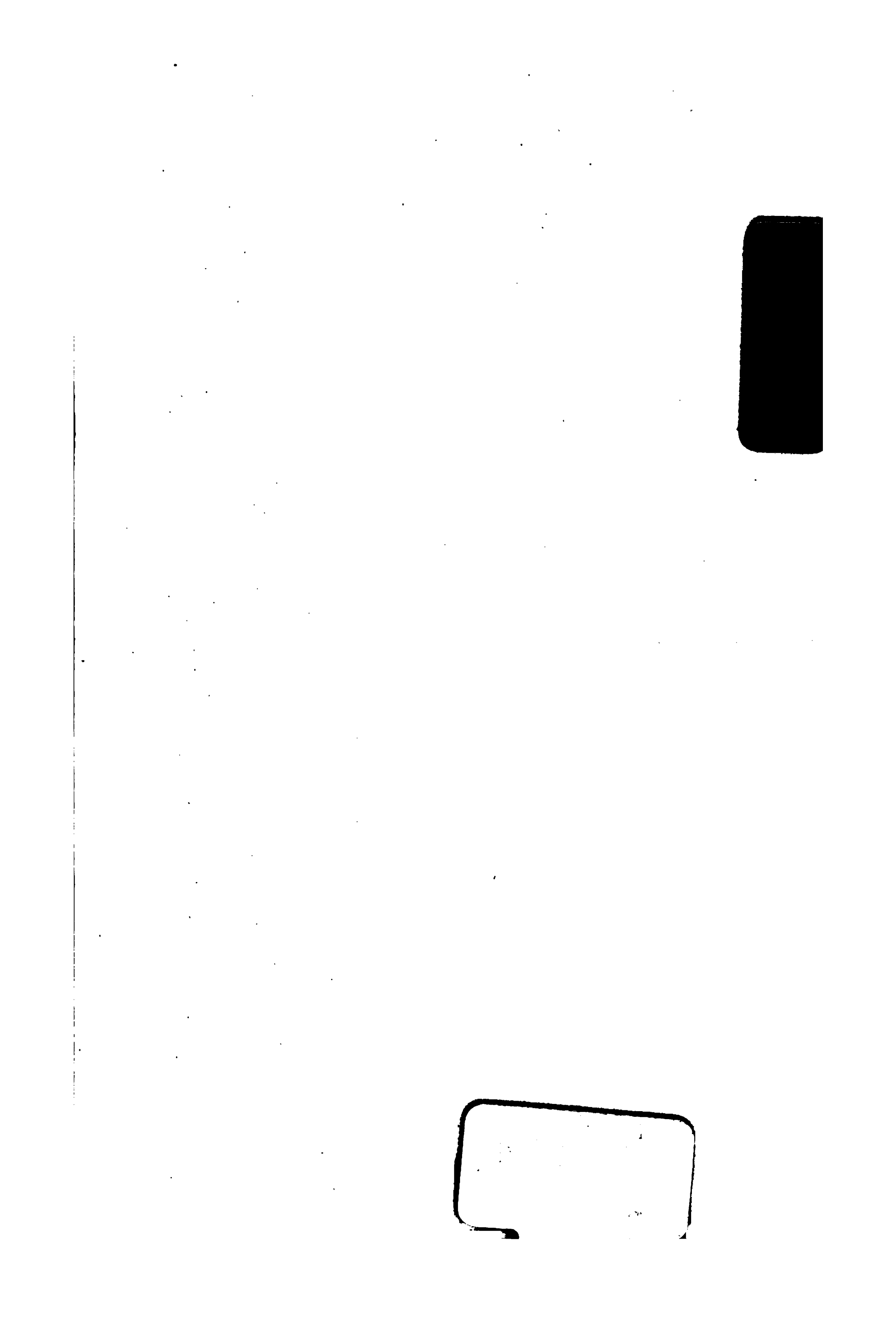
von

Dr. R. v. Fischer Benzon,

Oberlehrer am Gymnasium in Kiel.

Preis 10 Mark.

Kopenhagen. — Bianco Lunos kön. Hof-Buchdruckerei.





Math 8138.85
Lehrbuch der stereometrie,
Cabot Science
003370396
3 2044 091 926 790